Занимательная математика

Дифференциальные уравнения

Манга

マンガでわかる

微分方程式

佐藤　実／著
あづま　笙子／作画
トレンド・プロ／制作

Ohmsha

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сато Минору

Художник Адзума Секо

Перевод
С. Л. Плехановой

ДМК ПРЕСС издательство

Москва
ДМК Пресс, 2018

УДК 519.63
ББК 22.193
С21

Сато М.

С21 Занимательная математика. Дифференциальные уравнения. Манга / Сато Минору (автор), Адзума Секо (худ.); пер. с яп. С. Л. Плехановой. — М.: ДМК Пресс, 2018. — 238 с. : ил. — (Серия «Образовательная манга»). — Доп. тит. л. яп.

ISBN 978-5-97060-659-6

В этой манге интересно и увлекательно рассказано о совсем непростой теме – дифференциальных уравнениях.

Читатель вместе со школьницей Мидзуки, второкурсником Нояма Дайчи и Богиней чисел узнает, зачем нужны уравнения в обычной жизни, как они помогут запустить планер, предсказать погоду, почему остывает кофе и как мир математики связан с миром реальных людей и дел.

Простота изложения помогает следить за занимательным сюжетом, суть которого в том, что богиня цифр помогла Нояме и Мидзуки понять и полюбить мир чисел.

Вы узнаете о разных способах решения уравнения, про уравнения Бернулли и о том, почему на Хоккайдо увеличилась численность оленей эдзо и как это предсказать. Оказывается, изменение температуры тела при его охлаждении, вычисление скорости ракеты, изменение интенсивности ощущений в зависимости от раздражителя и другие явления также описываются похожими дифференциальными уравнениями. Разве это не удивительно, что такие разные явления реального мира в мире математики подчиняются моделям одного вида? Если бы не было дифференциальных уравнений, из-за ветра рушились бы висячие мосты, но инженеры делают специальные расчеты колебаний.

Цель книги – заинтересовать школьников, студентов математикой. Она наверняка заинтересует любознательных людей, которые подзабыли, что такое дифференциальные уравнения.

УДК 519.63
ББК 22.193

Manga de Wakaru Bibunhouteishiki (Manga Guide: Differential Equation)
By Minoru Sato (Author), Shouko Azuma (Illustrator)
and TREND-PRO Co., Ltd. (Producer)
Published by Ohmsha, Ltd.

Предисловие

Дифференциальные уравнения кажутся сложными, не так ли? Они и в самом деле сложные. Если честно, когда я ходил на лекции, я тоже не очень-то их понимал. Подобно герою этой манги, Даичи Нояма, я мог решать дифференциальные уравнения, но толком не понимал, что я делаю и почему. Я запомнил примеры решений и все формулы, решал задания из учебников, но все равно было ощущение, что я как в тумане.

Начнем с того, что решать дифференциальные уравнения действительно трудно. И так просто решения не найти. Таково распространенное мнение. Но на лекциях не дают уравнения, которые нельзя решить. А если известен способ решения какого-то дифференциального уравнения, то, значит, можно решить любое уравнение такого типа. Любой человек, разбирающийся в математике, может решить дифференциальное уравнение, если будет следовать формулам и примеру уже известных решений. Но, вступая в эту еще не привычную область математики, можно легко увязнуть в формулах и сложных преобразованиях и не видеть общей картины. В то время как, если остановиться и осмотреться, можно увидеть величественную картину.

Поэтому эта книга была написана, чтобы стать вашим путеводителем в мире дифференциальных уравнений, по которому вы будете путешествовать, следуя рекомендованному маршруту. Эта книга отличается от обычного учебника, и она не охватывает всего, что касается дифференциальных уравнений, и в ней нет строгости и универсальности, присущей учебникам. Прежде всего просто следуйте предложенному маршруту и наслаждайтесь открывающимися видами. Свободный полет в мире дифференциальных уравнений может доставить такие же захватывающие ощущения, как и реальный полет в небе. У людей нет крыльев, но они их создали и теперь могут летать по небу. Также и с помощью дифференциальных уравнений, как с помощью крыльев, можно свободно «летать» в мире математики. Я буду счастлив, если эта книга станет для вас толчком для взлета в мир дифференциальных уравнений.

В завершение я хочу от всего сердца поблагодарить сотрудников издательства Ohmsha, благодаря которым эта книга смогла появиться на свет; SWP, благодаря которому в сценарии появилась богиня цифр, что сделало книгу более увлекательной; художницу Адзума Секо, которая проделала большую работу и создала детальные иллюстрации к абстрактному миру математики. Эта книга – результат командной работы.

Ноябрь 2009 года
Сато Минору

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4
НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ... 111

Глава 5
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ... 151

ПРОЛОГ

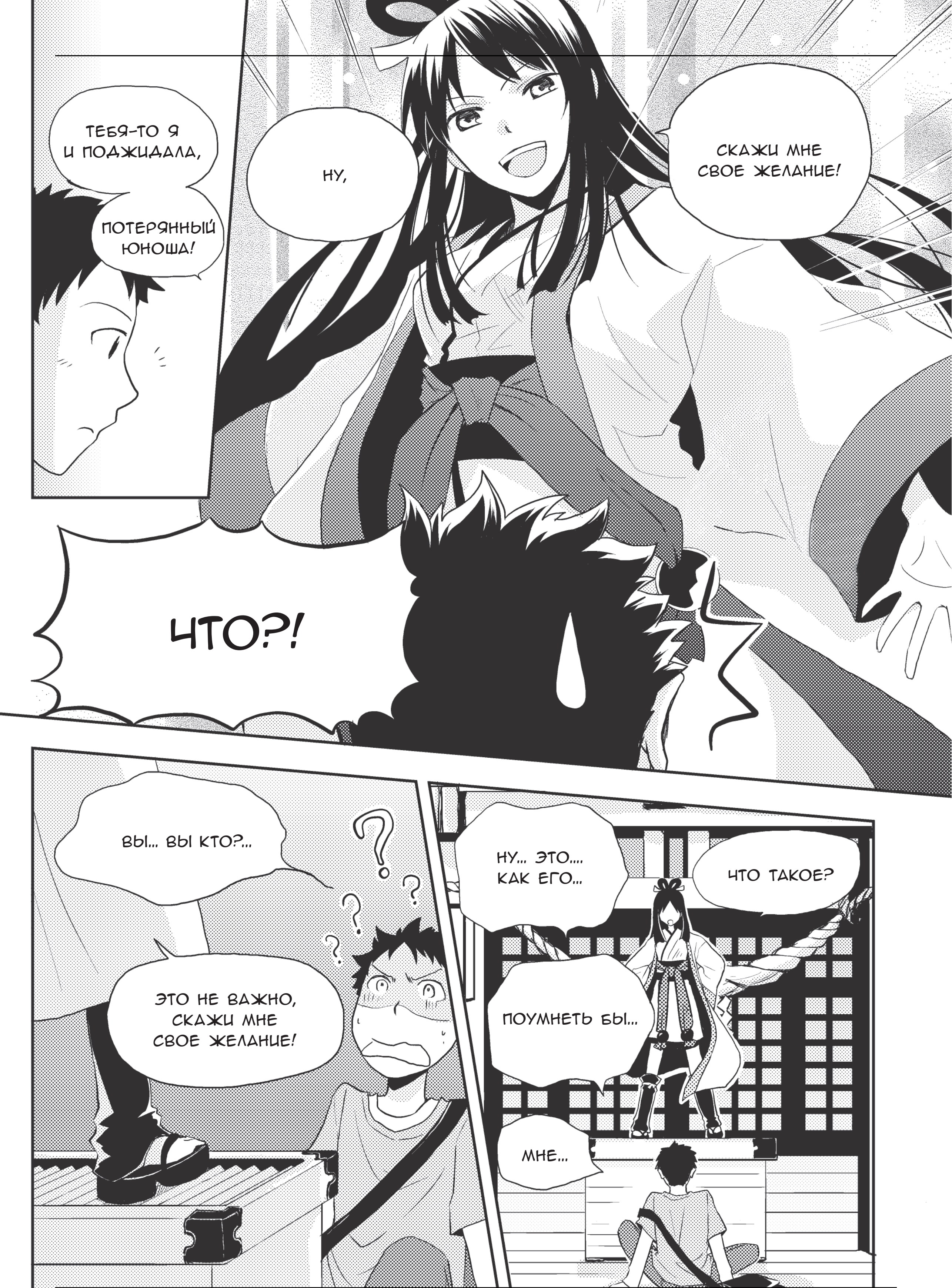
БОГИНЯ ЦИФР ИЗ ХРАМА ЧИСЕЛ

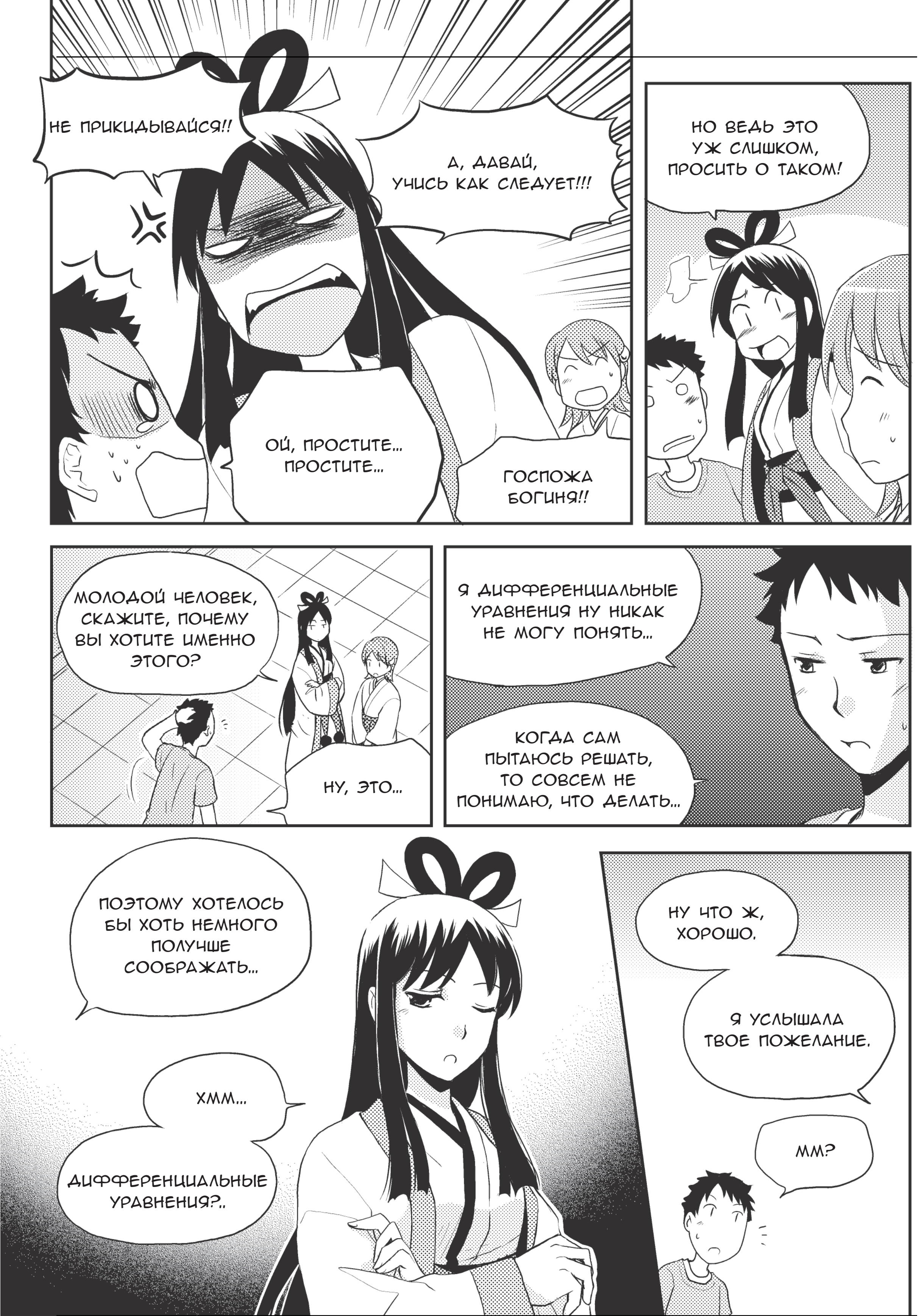

ААА...
СКУКОТИЩА!!!
ХОЧЕТСЯ КУДА-ТО ПОЙТИ РАЗВЛЕЧЬСЯ...
Богиня цифр – хранительница Храма чисел (Возраст не известен)

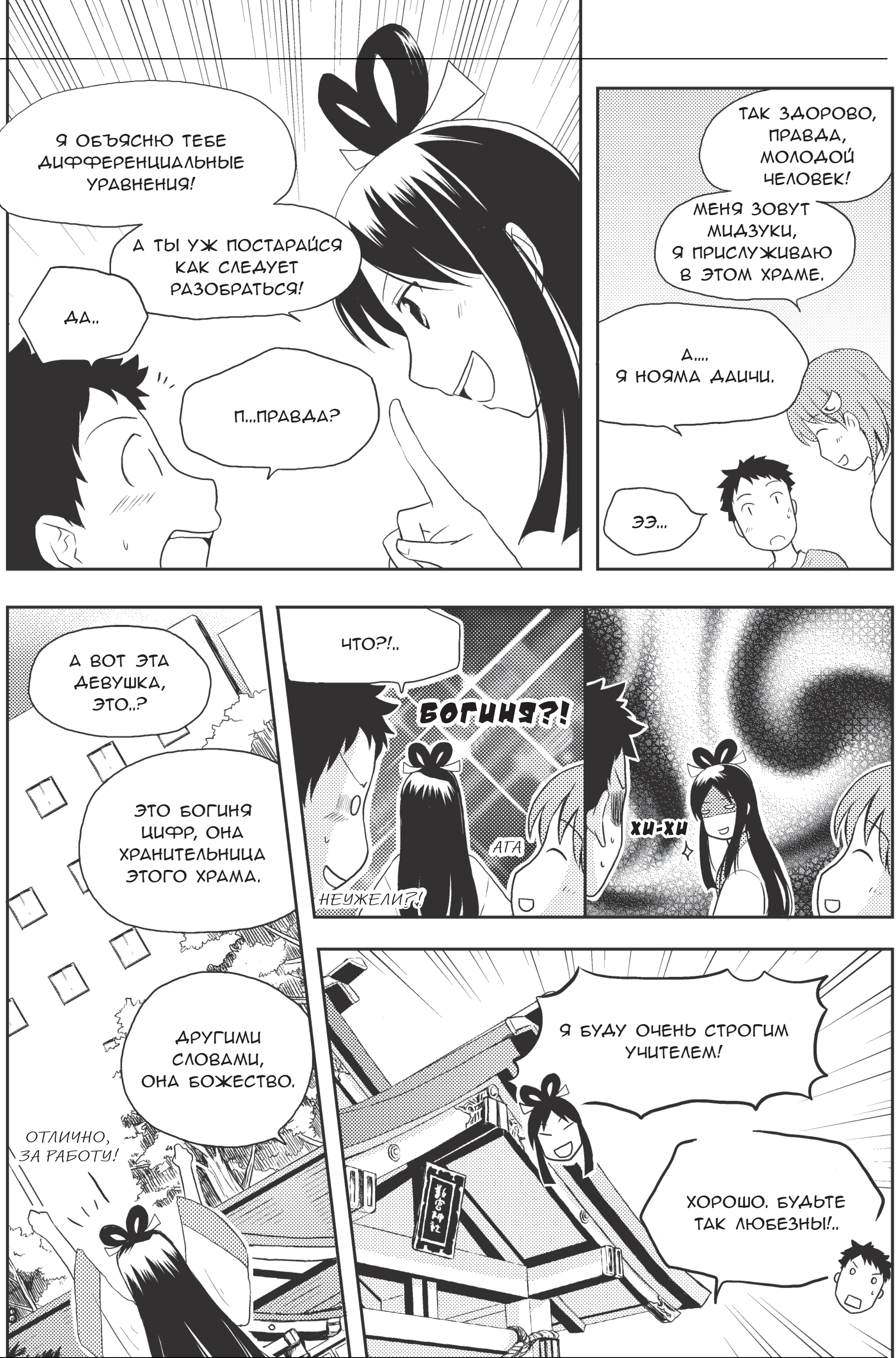

Эй, Мидзуки!
Дай-ка мне вселиться в тебя.
Я хочу выйти из храма.
Никак нельзя, госпожа богиня цифр, это очень тяжело для меня.
Мидзуки – служанка при Храме чисел
Да и кроме того, нельзя оставлять храм без божества.
Но ведь посетителей нет, и мне все равно нечего делать...
Жадина...
ммм


А по чьей вине, вы думаете, вам нечего делать?!
С недавних пор пошли слухи, что милости от вас не дождаться!
Разве вы хорошо делаете свою работу?!
прогуляла
ХРРРР
Ну... это....
Моя обязанность - охранять этот храм.
А вы - богиня, помогающая в учебе, должны как следует выполнять свою работу.
....
Загрустила...
Хорошо...
Ни вот, рассердилась...


НИЧЕГО НЕ ПОДЕЛАЕШЬ...
НУ ХОРОШО, ЕСЛИ ВЫПОЛНИТЕ ПРОСЬБУ СЛЕДУЮЩЕГО ПОСЕТИТЕЛЯ, ТО Я, ТАК И БЫТЬ,
РАЗРЕШУ ИСПОЛЬЗОВАТЬ СВОЕ ТЕЛО НА ОДИН ДЕНЬ.
ПРАВДА?!
ОТЛИЧНО, Я ИСПОЛНЮ!!! ОБЯЗАТЕЛЬНО ИСПОЛНЮ!!!
ПОДОЖДИ И УВИДИШЬ!
ХЛОП
Второкурсник Нояма Даичи
ЧТО-ТО НЕ МОГУ
РАЗОБРАТЬ, ЧЕГО ОН ХОЧЕТ... НУ ДА ЛАДНО.

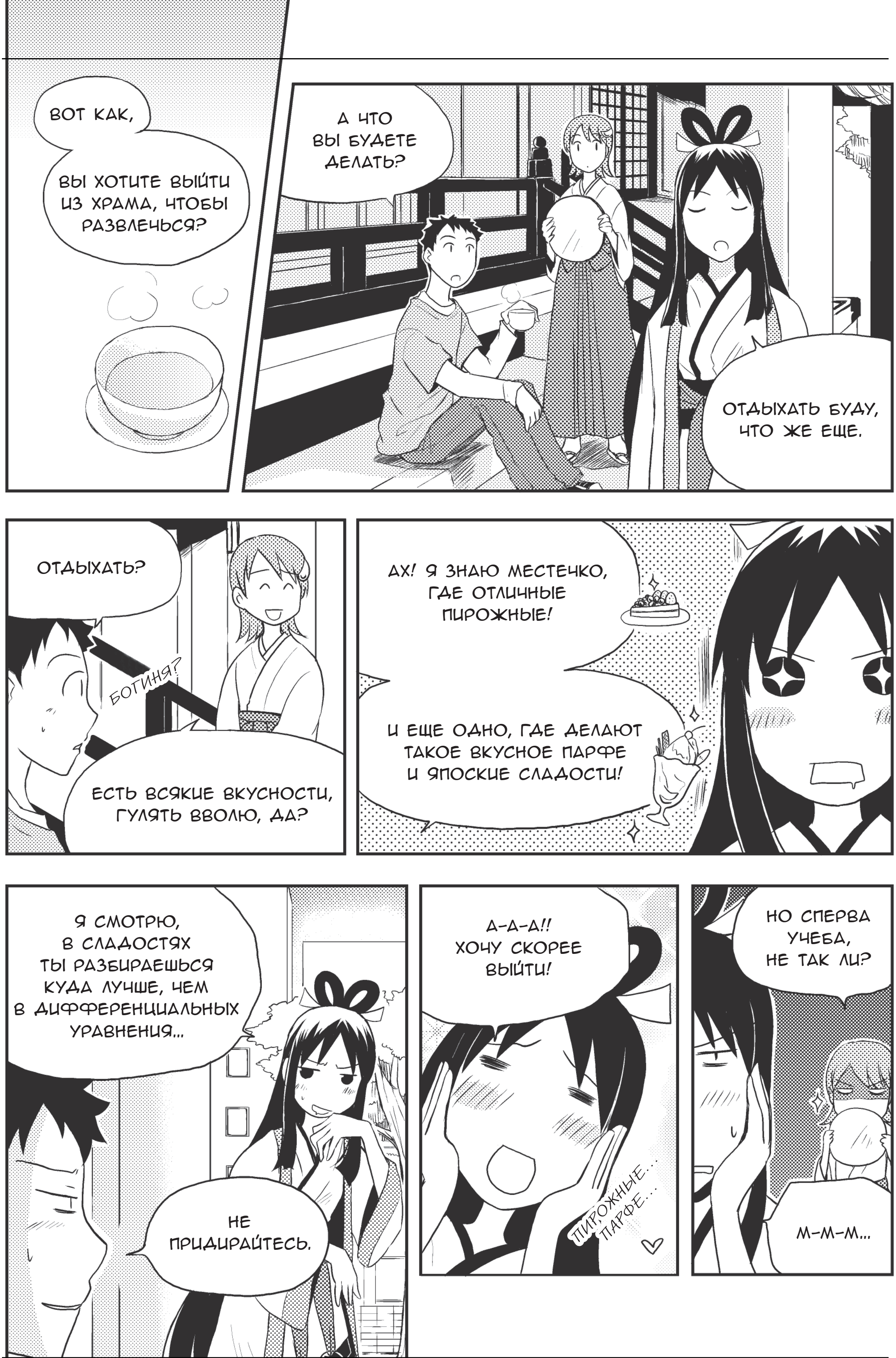

ТЕБЯ-ТО Я И ПОДЖИДАЛА,
ПОТЕРЯННЫЙ ЮНОША!
НУ,
СКАЖИ МНЕ СВОЕ ЖЕЛАНИЕ!
ЧТО?!
ВЫ... ВЫ КТО?...
ЭТО НЕ ВАЖНО, СКАЖИ МНЕ СВОЕ ЖЕЛАНИЕ!
НУ... ЭТО.... КАК ЕГО...
ЧТО ТАКОЕ?
ПОУМНЕТЬ БЫ...
МНЕ...


НЕ ПРИКИДЫВАЙСЯ!!
А, ДАВАЙ, УЧИСЬ КАК СЛЕДУЕТ!!!
ОЙ, ПРОСТИТЕ... ПРОСТИТЕ...
ГОСПОЖА БОГИНЯ!!
НО ВЕДЬ ЭТО УЖ СЛИШКОМ, ПРОСИТЬ О ТАКОМ!
МОЛОДОЙ ЧЕЛОВЕК, СКАЖИТЕ, ПОЧЕМУ ВЫ ХОТИТЕ ИМЕННО ЭТОГО?
НУ, ЭТО...
Я ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НУ НИКАК НЕ МОГУ ПОНЯТЬ...
КОГДА САМ ПЫТАЮСЬ РЕШАТЬ, ТО СОВСЕМ НЕ ПОНИМАЮ, ЧТО ДЕЛАТЬ...
ПОЭТОМУ ХОТЕЛОСЬ БЫ ХОТЬ НЕМНОГО ПОЛУЧШЕ СООБРАЖАТЬ...
ХММ...
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ?..
НУ ЧТО Ж, ХОРОШО.
Я УСЛЫШАЛА ТВОЕ ПОЖЕЛАНИЕ.
ММ?

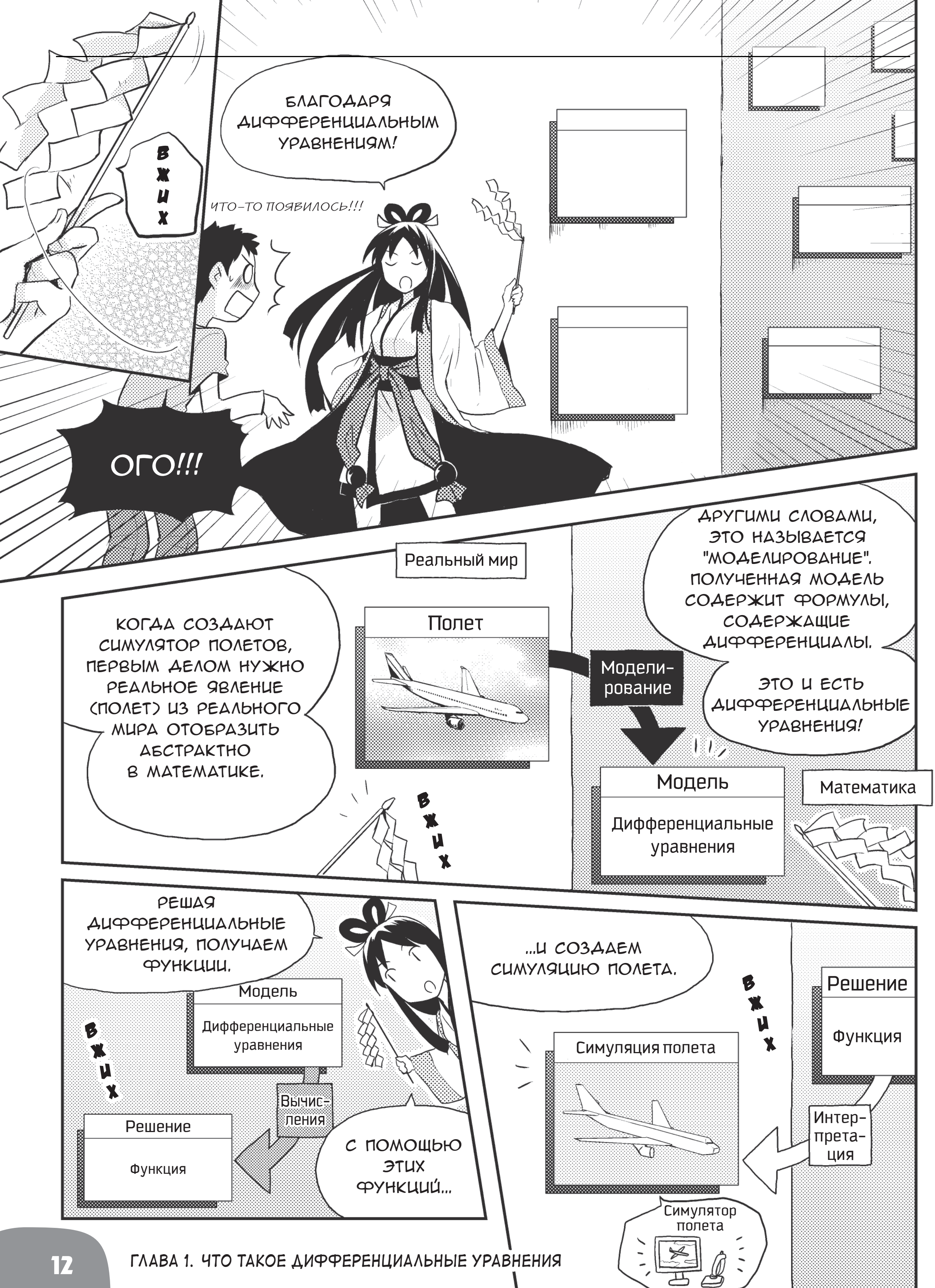

Я ОБЪЯСНЮ ТЕБЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ!
А ТЫ УЖ ПОСТАРАЙСЯ КАК СЛЕДУЕТ РАЗОБРАТЬСЯ!
ДА..
П...ПРАВДА?
ТАК ЗДОРОВО, ПРАВДА, МОЛОДОЙ ЧЕЛОВЕК!
МЕНЯ ЗОВУТ МИДЗУКИ, Я ПРИСЛУЖИВАЮ В ЭТОМ ХРАМЕ.
А.... Я НОЯМА ДАИЧИ.
ЭЭ...
А ВОТ ЭТА ДЕВУШКА, ЭТО..?
ЭТО БОГИНЯ ЦИФР, ОНА ХРАНИТЕЛЬНИЦА ЭТОГО ХРАМА.
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ОНА БОЖЕСТВО.
ОТЛИЧНО, ЗА РАБОТУ!
ЧТО?!..
БОГИНЯ?!
АГА
НЕУЖЕЛИ?!
ХИ-ХИ
Я БУДУ ОЧЕНЬ СТРОГИМ УЧИТЕЛЕМ!
ХОРОШО. БУДЬТЕ ТАК ЛЮБЕЗНЫ!..

ГЛАВА 1

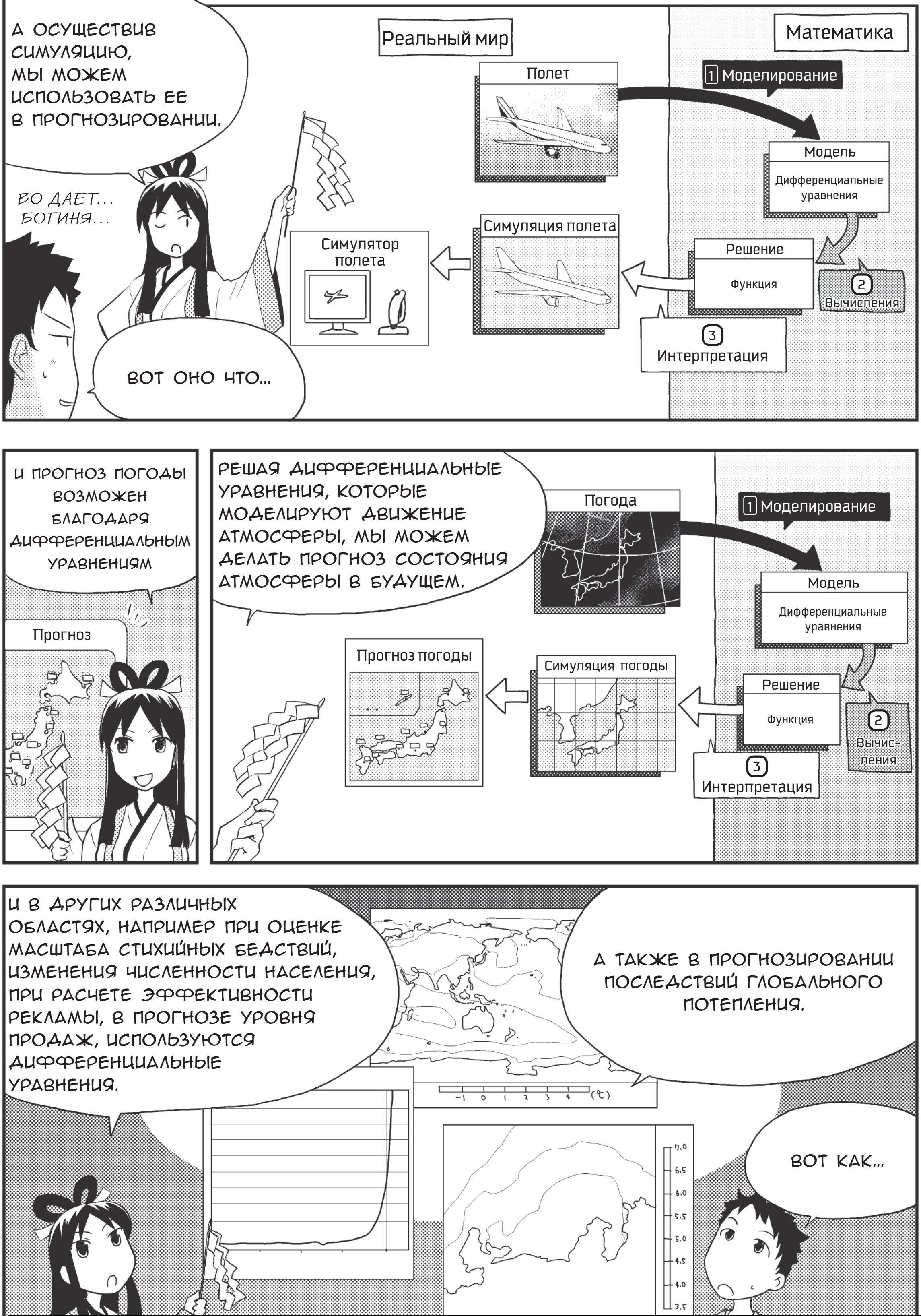
ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

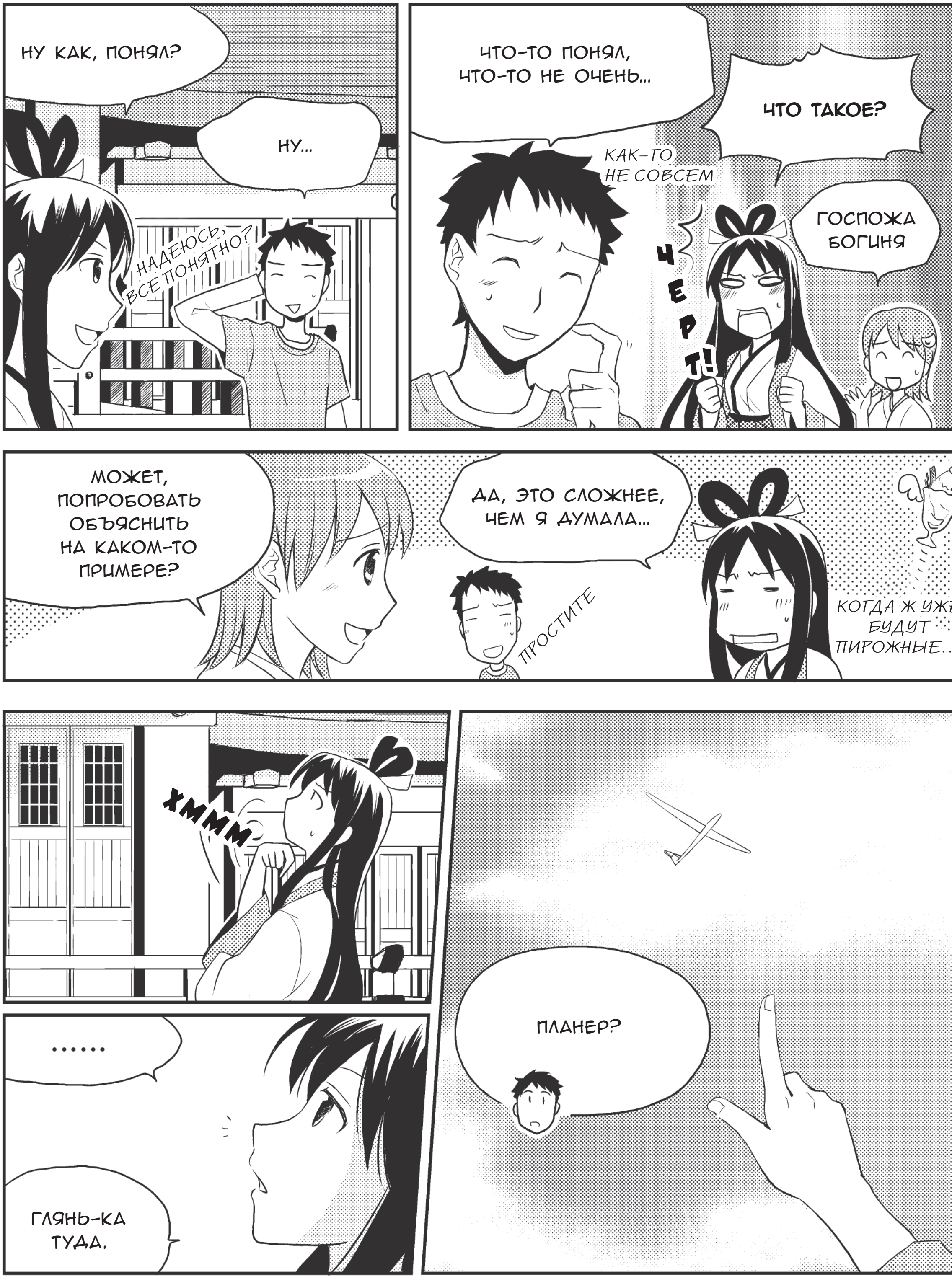

ВОТ КАК,
ВЫ ХОТИТЕ ВЫЙТИ ИЗ ХРАМА, ЧТОБЫ РАЗВЛЕЧЬСЯ?
А ЧТО ВЫ БУДЕТЕ ДЕЛАТЬ?
ОТДЫХАТЬ БУДУ, ЧТО ЖЕ ЕЩЕ.
ОТДЫХАТЬ?
БОГИНЯ?
ЕСТЬ ВСЯКИЕ ВКУСНОСТИ, ГУЛЯТЬ ВВОЛЮ, ДА?
АХ! Я ЗНАЮ МЕСТЕЧКО, ГДЕ ОТЛИЧНЫЕ ПИРОЖНЫЕ!
И ЕЩЕ ОДНО, ГДЕ ДЕЛАЮТ ТАКОЕ ВКУСНОЕ ПАРФЕ И ЯПОСКИЕ СЛАДОСТИ!
Я СМОТРЮ, В СЛАДОСТЯХ ТЫ РАЗБИРАЕШЬСЯ КУДА ЛУЧШЕ, ЧЕМ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯ...
НЕ ПРИДИРАЙТЕСЬ.
А-А-А!! ХОЧУ СКОРЕЕ ВЫЙТИ!
ПИРОЖНЫЕ... ПАРФЕ...
НО СПЕРВА УЧЕБА, НЕ ТАК ЛИ?
М-М-М...

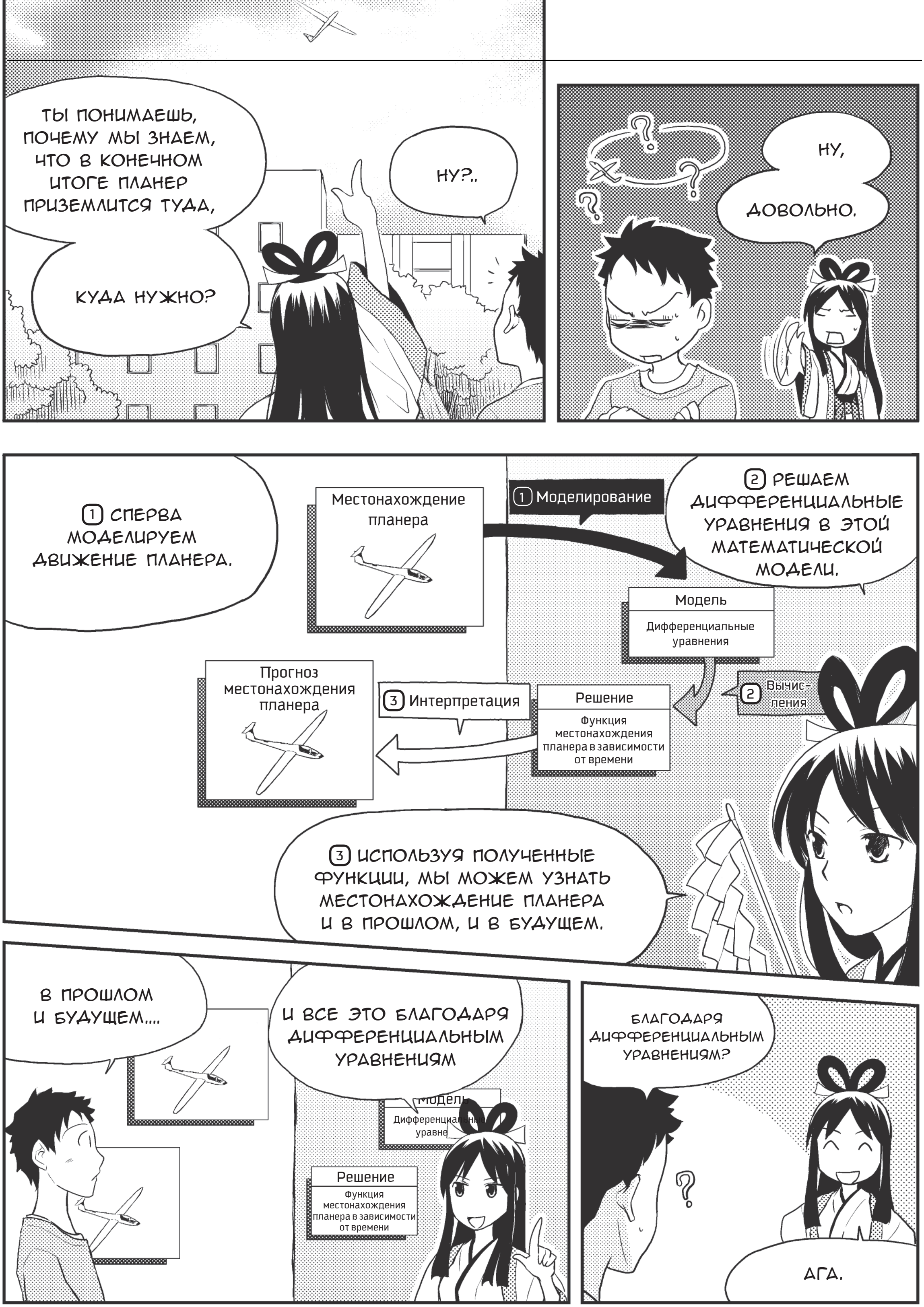

Давай-ка скорее начнем.
Сейчас быстренько со всем разберемся!
Дифференциальные уравнения – это инструмент для отображения вашего реального мира в мире математики.
Поэтому...
Если знать дифференциальные уравнения,
то можно видеть будущее.
Будущее?..
Ты знаешь, что такое "симулятор полетов"?
Это тот, который в компьютерных играх?
Ага,
тот, где ты можешь попробовать управлять самолетом.
Так вот, а ты знаешь, как этот симулятор работает?
Ну, я в этом не очень разбираюсь...
Как-то компьютер это все рассчитывает, наверное....
Угу,
а эти рассчеты осуществляются...



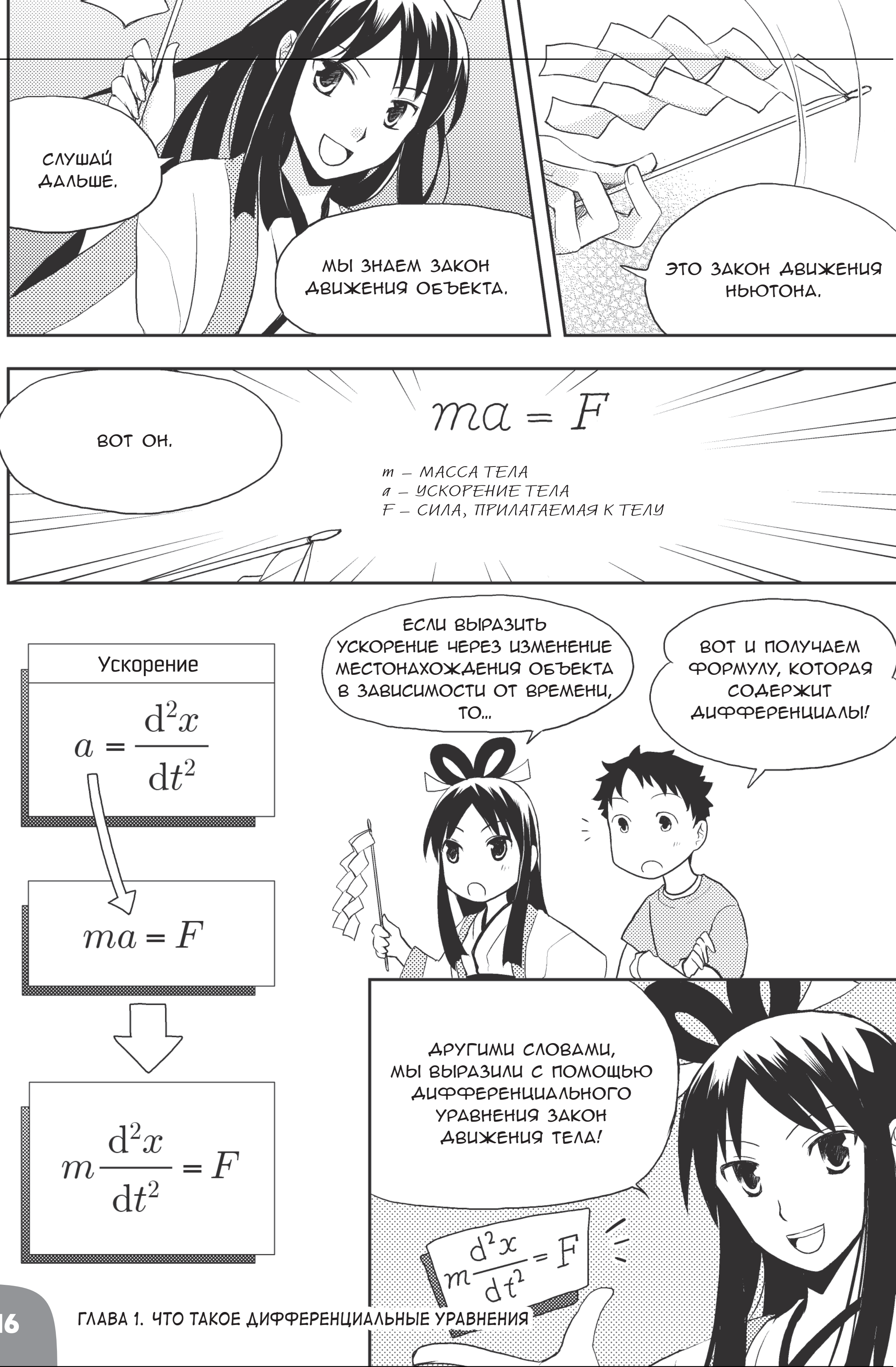
БЛАГОДАРЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ!
ВЖИХ
ЧТО-ТО ПОЯВИЛОСЬ!!!
ОГО!!!
Реальный мир
КОГДА СОЗДАЮТ СИМУЛЯТОР ПОЛЕТОВ, ПЕРВЫМ ДЕЛОМ НУЖНО РЕАЛЬНОЕ ЯВЛЕНИЕ (ПОЛЕТ) ИЗ РЕАЛЬНОГО МИРА ОТОБРАЗИТЬ АБСТРАКТНО В МАТЕМАТИКЕ.
Полет
Моделирование
Модель
Дифференциальные уравнения
Математика
ВЖИХ
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ "МОДЕЛИРОВАНИЕ". ПОЛУЧЕННАЯ МОДЕЛЬ СОДЕРЖИТ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.
ЭТО И ЕСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ!
РЕШАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМ ФУНКЦИИ.
Модель
Дифференциальные уравнения
Вычисления
Решение
Функция
ВЖИХ
С ПОМОЩЬЮ ЭТИХ ФУНКЦИЙ...
...И СОЗДАЕМ СИМУЛЯЦИЮ ПОЛЕТА.
ВЖИХ
Решение
Функция
Интерпретация
Симуляция полета
Симулятор полета

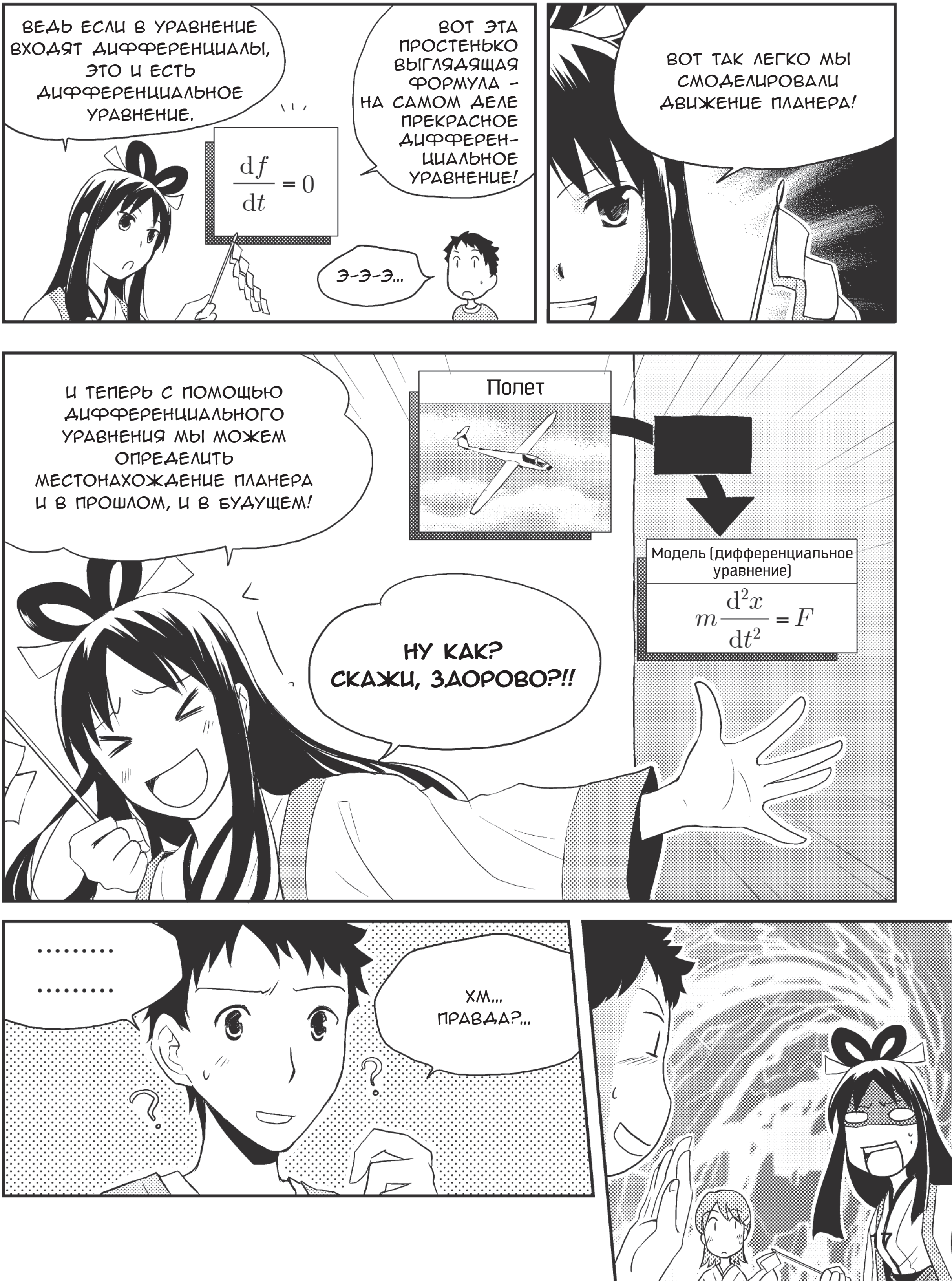

А ОСУЩЕСТВИВ СИМУЛЯЦИЮ, МЫ МОЖЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЕЕ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ.
Реальный мир
Математика
Полет
1 Моделирование
Модель
Дифференциальные уравнения
2 Вычисления
Решение
Функция
3 Интерпретация
Симуляция полета
Симулятор полета
ВО ДАЕТ... БОГИНЯ...
ВОТ ОНО ЧТО...
И ПРОГНОЗ ПОГОДЫ ВОЗМОЖЕН БЛАГОДАРЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
Прогноз
РЕШАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ МОДЕЛИРУЮТ ДВИЖЕНИЕ АТМОСФЕРЫ, МЫ МОЖЕМ ДЕЛАТЬ ПРОГНОЗ СОСТОЯНИЯ АТМОСФЕРЫ В БУДУЩЕМ.
Погода
1 Моделирование
Модель
Дифференциальные уравнения
2 Вычис-ления
Решение
Функция
3 Интерпретация
Симуляция погоды
Прогноз погоды
И В ДРУГИХ РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ, НАПРИМЕР ПРИ ОЦЕНКЕ МАСШТАБА СТИХИЙНЫХ БЕДСТВИЙ, ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ, ПРИ РАСЧЕТЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМЫ, В ПРОГНОЗЕ УРОВНЯ ПРОДАЖ, ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
А ТАКЖЕ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ПОСЛЕДСТВИЙ ГЛОБАЛЬНОГО ПОТЕПЛЕНИЯ.
ВОТ КАК...

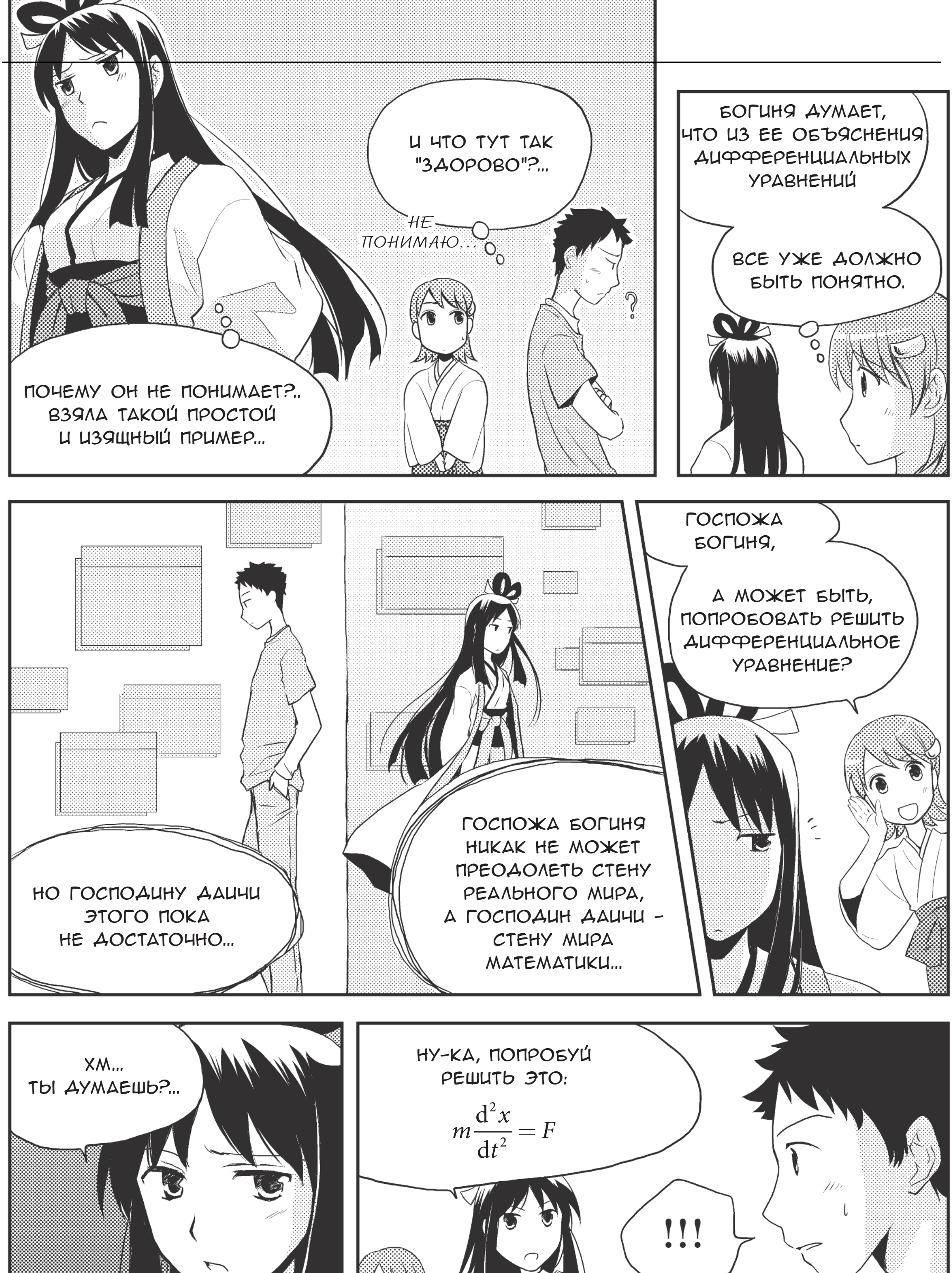

НУ КАК, ПОНЯЛ?
НУ...
НАДЕЮСЬ, ВСЕ ПОНЯТНО?
ЧТО-ТО ПОНЯЛ, ЧТО-ТО НЕ ОЧЕНЬ...
КАК-ТО НЕ СОВСЕМ
ЧТО ТАКОЕ?
ЧЕРТ!
ГОСПОЖА БОГИНЯ
МОЖЕТ, ПОПРОБОВАТЬ ОБЪЯСНИТЬ НА КАКОМ-ТО ПРИМЕРЕ?
ДА, ЭТО СЛОЖНЕЕ, ЧЕМ Я ДУМАЛА...
ПРОСТИТЕ
КОГДА Ж УЖЕ БУДУТ ПИРОЖНЫЕ...
ХМММ
......
ГЛЯНЬ-КА ТУДА.
ПЛАНЕР?

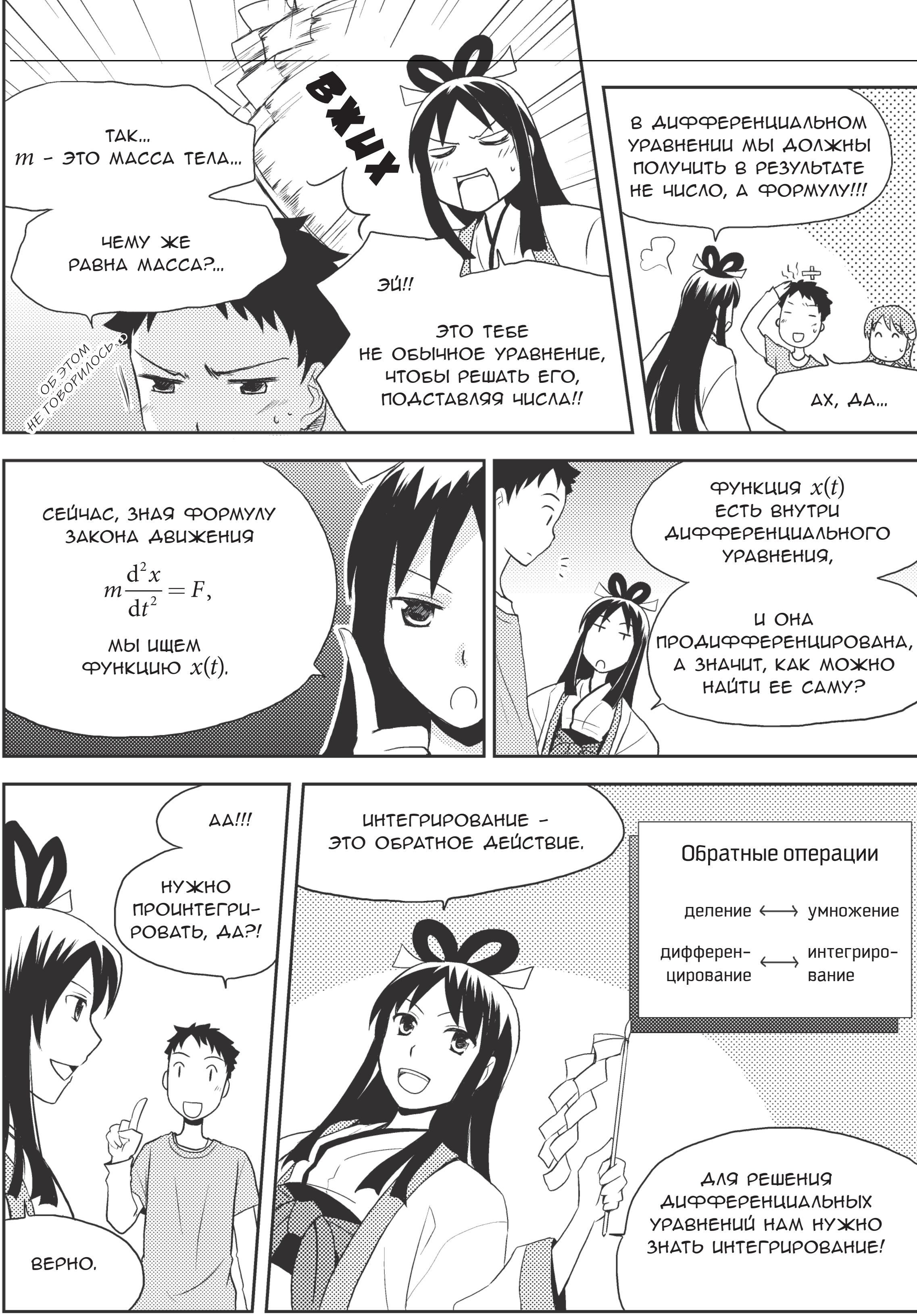


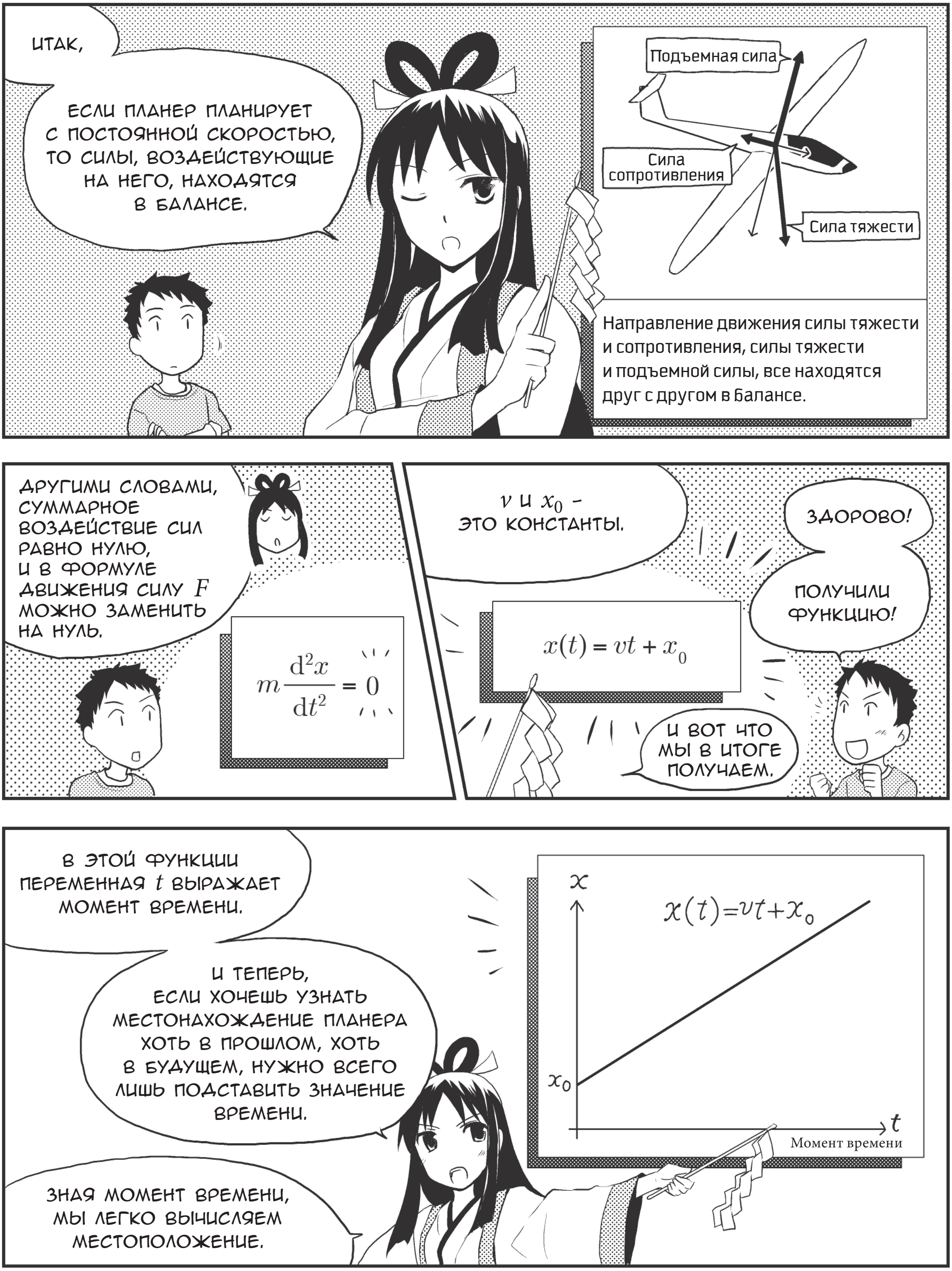
Ты понимаешь, почему мы знаем, что в конечном итоге планер приземлится туда,
куда нужно?
Ну?..
Ну,
довольно.
1 Сперва моделируем движение планера.
Местонахождение планера
1 Моделирование
2 Решаем дифференциальные уравнения в этой математической модели.
Модель
Дифференциальные уравнения
Прогноз местонахождения планера
3 Интерпретация
Решение
Функция местонахождения планера в зависимости от времени
2 Вычис-ления
3 Используя полученные функции, мы можем узнать местонахождение планера и в прошлом, и в будущем.
В прошлом и будущем....
И все это благодаря дифференциальным уравнениям
Решение
Функция местонахождения планера в зависимости от времени
Благодаря дифференциальным уравнениям?
Ага.

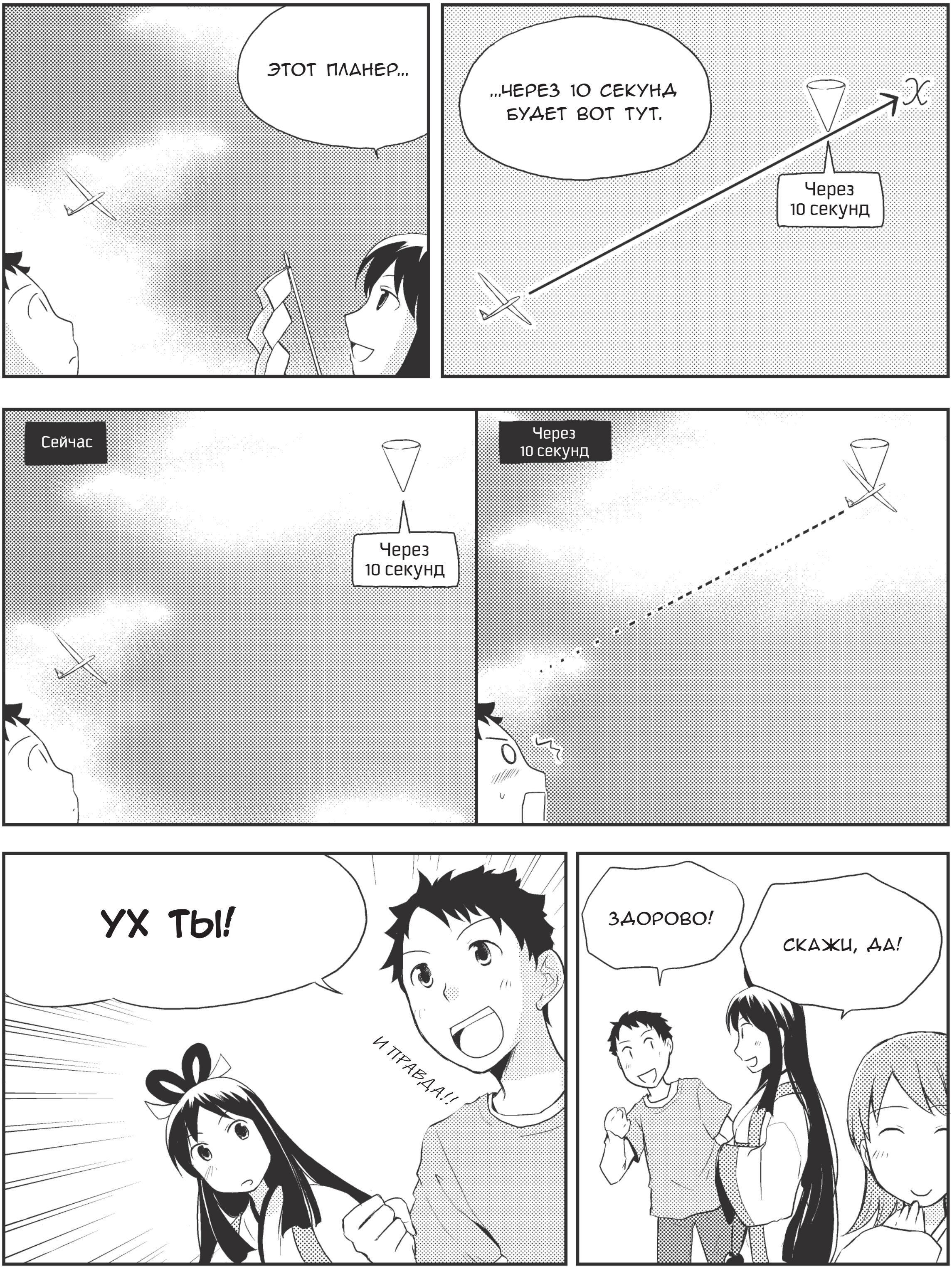

СЛУШАЙ ДАЛЬШЕ.
МЫ ЗНАЕМ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА.
ЭТО ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ НЬЮТОНА.
ВОТ ОН.
$ma = F$
m – МАССА ТЕЛА
a – УСКОРЕНИЕ ТЕЛА
F – СИЛА, ПРИЛАГАЕМАЯ К ТЕЛУ
Ускорение
$a = \frac{d^2x}{dt^2}$
$ma = F$
$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$
ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ УСКОРЕНИЕ ЧЕРЕЗ ИЗМЕНЕНИЕ МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ, ТО...
ВОТ И ПОЛУЧАЕМ ФОРМУЛУ, КОТОРАЯ СОДЕРЖИТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ!
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, МЫ ВЫРАЗИЛИ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА!
$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$

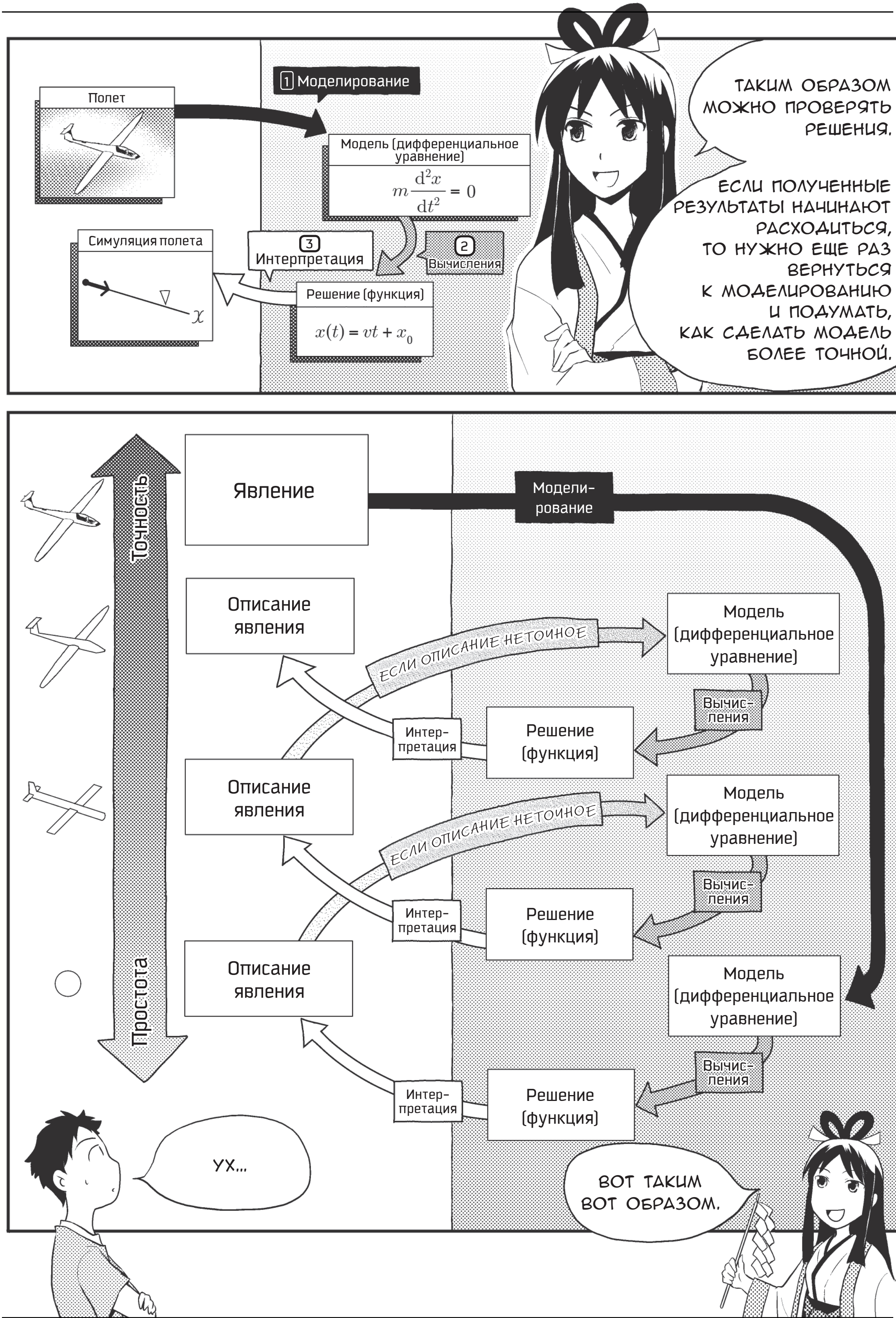

ВЕДЬ ЕСЛИ В УРАВНЕНИЕ ВХОДЯТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, ЭТО И ЕСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$
ВОТ ЭТА ПРОСТЕНЬКО ВЫГЛЯДЯЩАЯ ФОРМУЛА – НА САМОМ ДЕЛЕ ПРЕКРАСНОЕ ДИФФЕРЕН-ЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ!
Э-Э-Э...
ВОТ ТАК ЛЕГКО МЫ СМОДЕЛИРОВАЛИ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕРА!
И ТЕПЕРЬ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЫ МОЖЕМ ОПРЕДЕЛИТЬ МЕСТОНАХОЖДЕНИЕ ПЛАНЕРА И В ПРОШЛОМ, И В БУДУЩЕМ!
Полет
Модель (дифференциальное уравнение)
$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$
НУ КАК? СКАЖИ, ЗДОРОВО?!!
....
....
ХМ... ПРАВДА?...


И что тут так "здорово"?...
Не понимаю...
Почему он не понимает?.. Взяла такой простой и изящный пример...
Богиня думает, что из ее объяснения дифференциальных уравнений
все уже должно быть понятно.
Госпожа Богиня,
а может быть, попробовать решить дифференциальное уравнение?
Госпожа Богиня никак не может преодолеть стену реального мира, а господин Даичи – стену мира математики...
Но господину Даичи этого пока не достаточно...
Хм... ты думаешь?...
Ну-ка, попробуй решить это:
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F$
!!!

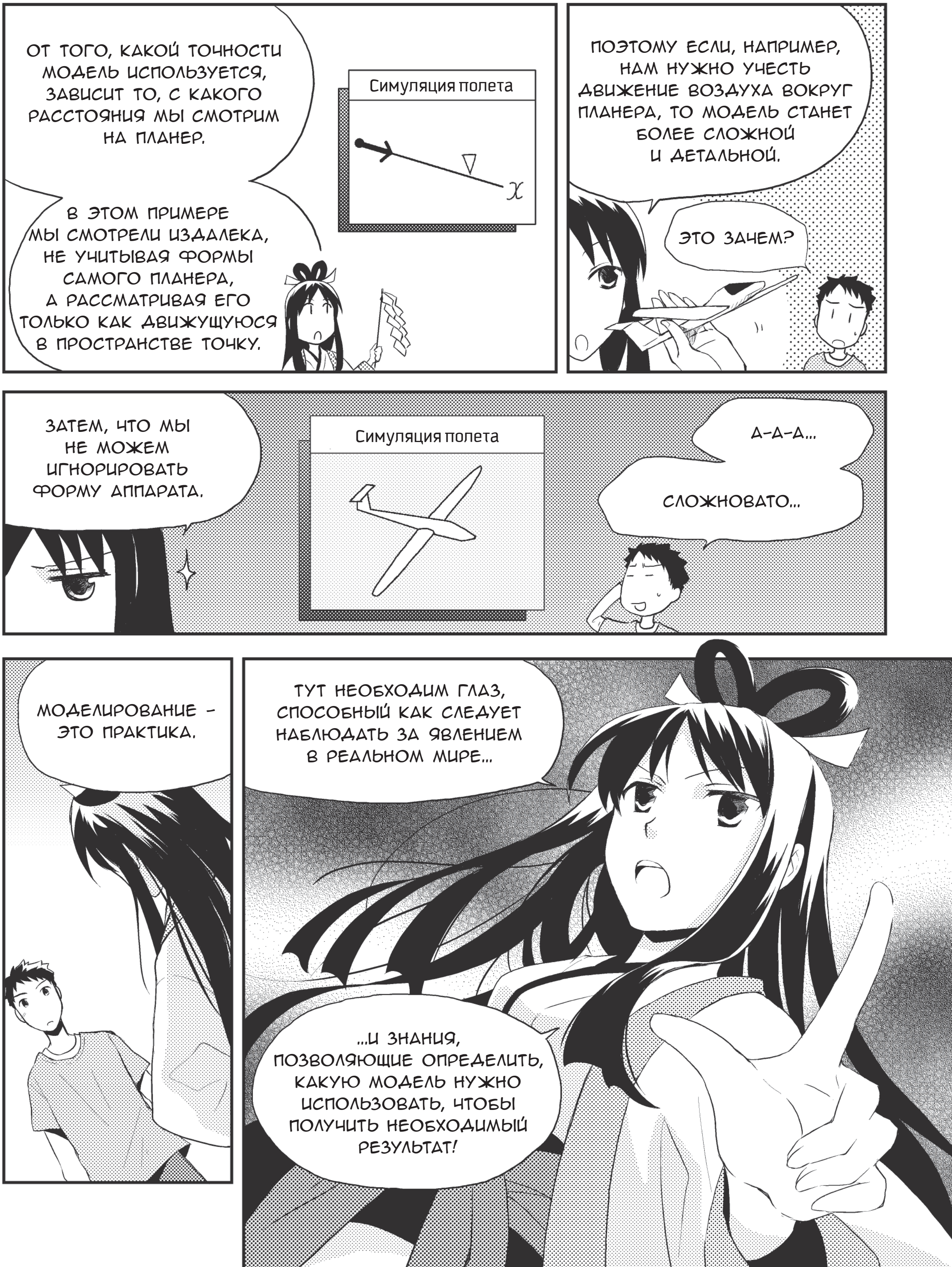

ТАК...
m – ЭТО МАССА ТЕЛА...
ЧЕМУ ЖЕ РАВНА МАССА?...
ВЖИХ
ОБ ЭТОМ НЕ ГОВОРИЛОСЬ
ЭЙ!!
ЭТО ТЕБЕ НЕ ОБЫЧНОЕ УРАВНЕНИЕ, ЧТОБЫ РЕШАТЬ ЕГО, ПОДСТАВЛЯЯ ЧИСЛА!!
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ МЫ ДОЛЖНЫ ПОЛУЧИТЬ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕ ЧИСЛО, А ФОРМУЛУ!!!
АХ, ДА...
СЕЙЧАС, ЗНАЯ ФОРМУЛУ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$, МЫ ИЩЕМ ФУНКЦИЮ $x(t)$.
ФУНКЦИЯ $x(t)$ ЕСТЬ ВНУТРИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ,
И ОНА ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНА, А ЗНАЧИТ, КАК МОЖНО НАЙТИ ЕЕ САМУ?
ДА!!!
НУЖНО ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ, ДА?!
ВЕРНО.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ – ЭТО ОБРАТНОЕ ДЕЙСТВИЕ.
Обратные операции
деление ⟷ умножение
дифференцирование ⟷ интегрирование
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАМ НУЖНО ЗНАТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЕ!

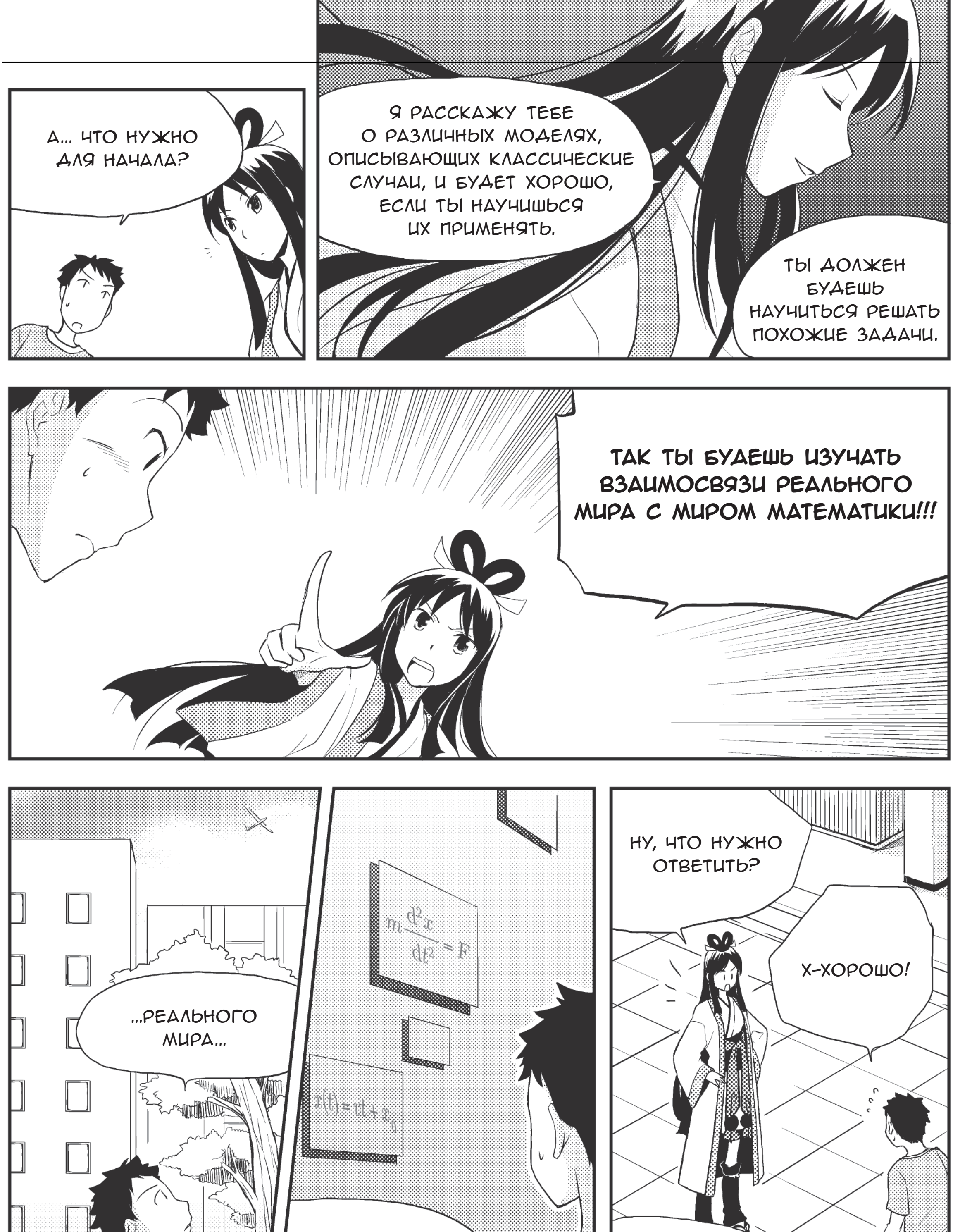

Итак,
Если планер планирует с постоянной скоростью, то силы, воздействующие на него, находятся в балансе.
Подъемная сила
Сила сопротивления
Сила тяжести
Направление движения силы тяжести и сопротивления, силы тяжести и подъемной силы, все находятся друг с другом в балансе.
Другими словами, суммарное воздействие сил равно нулю, и в формуле движения силу F можно заменить на нуль.
$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$
v и x_0 – это константы.
$x(t) = vt + x_0$
И вот что мы в итоге получаем.
Здорово!
Получили функцию!
В этой функции переменная t выражает момент времени.
И теперь, если хочешь узнать местонахождение планера хоть в прошлом, хоть в будущем, нужно всего лишь подставить значение времени.
Зная момент времени, мы легко вычисляем местоположение.
x
$x(t)=vt+x_0$
x_0
t
Момент времени


ЭТОТ ПЛАНЕР...
...ЧЕРЕЗ 10 СЕКУНД БУДЕТ ВОТ ТУТ.
x
Через 10 секунд
Сейчас
Через 10 секунд
Через 10 секунд
УХ ТЫ!
И ПРАВДА!!
ЗДОРОВО!
СКАЖИ, ДА!



Полет
1 Моделирование
Модель (дифференциальное уравнение)
$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$
2 Вычисления
3 Интерпретация
Решение (функция)
$x(t) = vt + x_0$
Симуляция полета
x
Таким образом можно проверять решения.
Если полученные результаты начинают расходиться, то нужно еще раз вернуться к моделированию и подумать, как сделать модель более точной.
Точность
Простота
Явление
Моделирование
Модель (дифференциальное уравнение)
Вычисления
Решение (функция)
Интерпретация
Описание явления
Если описание неточное
Модель (дифференциальное уравнение)
Вычисления
Решение (функция)
Интерпретация
Описание явления
Если описание неточное
Модель (дифференциальное уравнение)
Вычисления
Решение (функция)
Интерпретация
Описание явления
Ух...
Вот таким вот образом.


От того, какой точности модель используется, зависит то, с какого расстояния мы смотрим на планер.
Симуляция полета
В этом примере мы смотрели издалека, не учитывая формы самого планера, а рассматривая его только как движущуюся в пространстве точку.
Поэтому если, например, нам нужно учесть движение воздуха вокруг планера, то модель станет более сложной и детальной.
Это зачем?
Затем, что мы не можем игнорировать форму аппарата.
Симуляция полета
А-а-а...
Сложновато...
Моделирование – это практика.
Тут необходим глаз, способный как следует наблюдать за явлением в реальном мире...
...и знания, позволяющие определить, какую модель нужно использовать, чтобы получить необходимый результат!



А... ЧТО НУЖНО ДЛЯ НАЧАЛА?
Я РАССКАЖУ ТЕБЕ О РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ, ОПИСЫВАЮЩИХ КЛАССИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ, И БУДЕТ ХОРОШО, ЕСЛИ ТЫ НАУЧИШЬСЯ ИХ ПРИМЕНЯТЬ.
ТЫ ДОЛЖЕН БУДЕШЬ НАУЧИТЬСЯ РЕШАТЬ ПОХОЖИЕ ЗАДАЧИ.
ТАК ТЫ БУДЕШЬ ИЗУЧАТЬ ВЗАИМОСВЯЗИ РЕАЛЬНОГО МИРА С МИРОМ МАТЕМАТИКИ!!!
...РЕАЛЬНОГО МИРА...
...С МИРОМ МАТЕМАТИКИ...
$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$
$x(t) = vt + x_0$
НУ, ЧТО НУЖНО ОТВЕТИТЬ?
Х-ХОРОШО!
ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ!

ГЛАВА 2

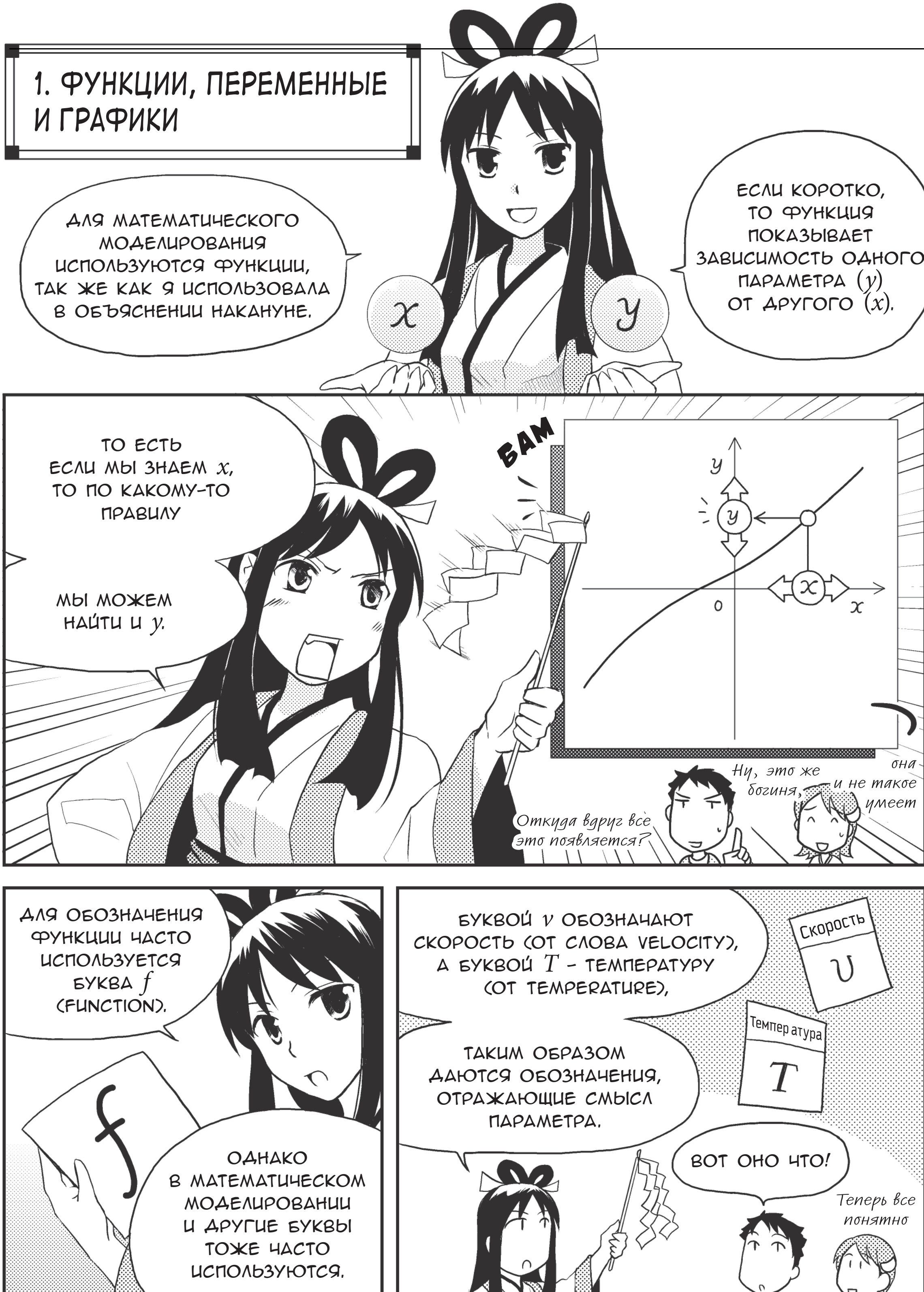
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНАЛИЗА


Пожалуйста, пусть у меня на экзамене будут хорошие результаты.
Учись лучше!
Прошу помощи на следующем тестировании.
Учись лучше!
Пожалуйста, пусть у меня снизится давление, и пусть магазин процветает, и жена пусть вернется...
....
НЕ ПО АДРЕСУ ПРИШЕЛ!!
НЕ ПОНЯТНО РАЗВЕ!!
Госпожа богиня!
Что вы делаете, у нас и так совсем мало посетителей?
Отвечайте, пожалуйста, повежливее всем, кто бы ни был!
Будьте хоть немного сердечнее...

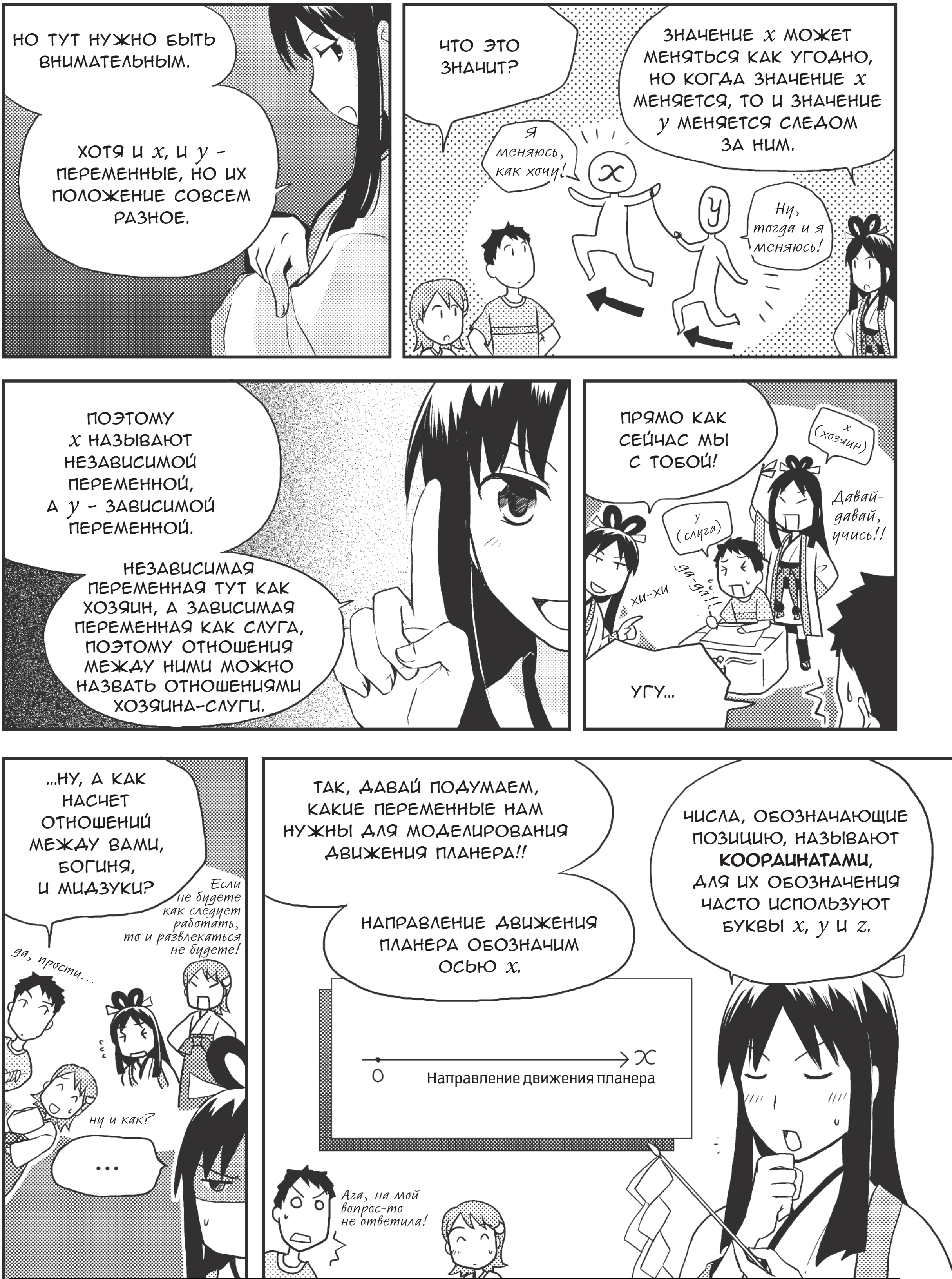
ЭТИ ЛЮДИ... У НИХ У ВСЕХ КАКИЕ-ТО ПРОБЛЕМЫ.
НУ ТАК ЭТО И ЕСТЬ ВАША РАБОТА, ВЫСЛУШИВАТЬ ИХ ПРОБЛЕМЫ, НЕ ТАК ЛИ?!
Какой-то вид у нее отсутствующий...
ОДНАКО, ГДЕ ЖЕ ЭТОТ ПАРЕНЬ?
НАДО БЫСТРЕНЬКО СО ВСЕМ РАЗОБРАТЬСЯ И ПОЙТИ, НАКОНЕЦ, В ТУР ПО КОНДИТЕРСКИМ!
ВЫ О ГОСПОДИНЕ ДАИЧИ?
ОН УЖЕ ДАВНО ПРИШЕЛ.
ПОМОГАЕТ МНЕ С УБОРКОЙ ХРАМА.
А!
ГОСПОЖА БОГИНЯ, ДОБРЫЙ ДЕНЬ!
...ХМ. ТАКОЙ ВЕСЬ ИЗ СЕБЯ ХОРОШИЙ.
?
НУ, ДАВАЙ СКОРЕЕ ПРОДОЛЖАТЬ!

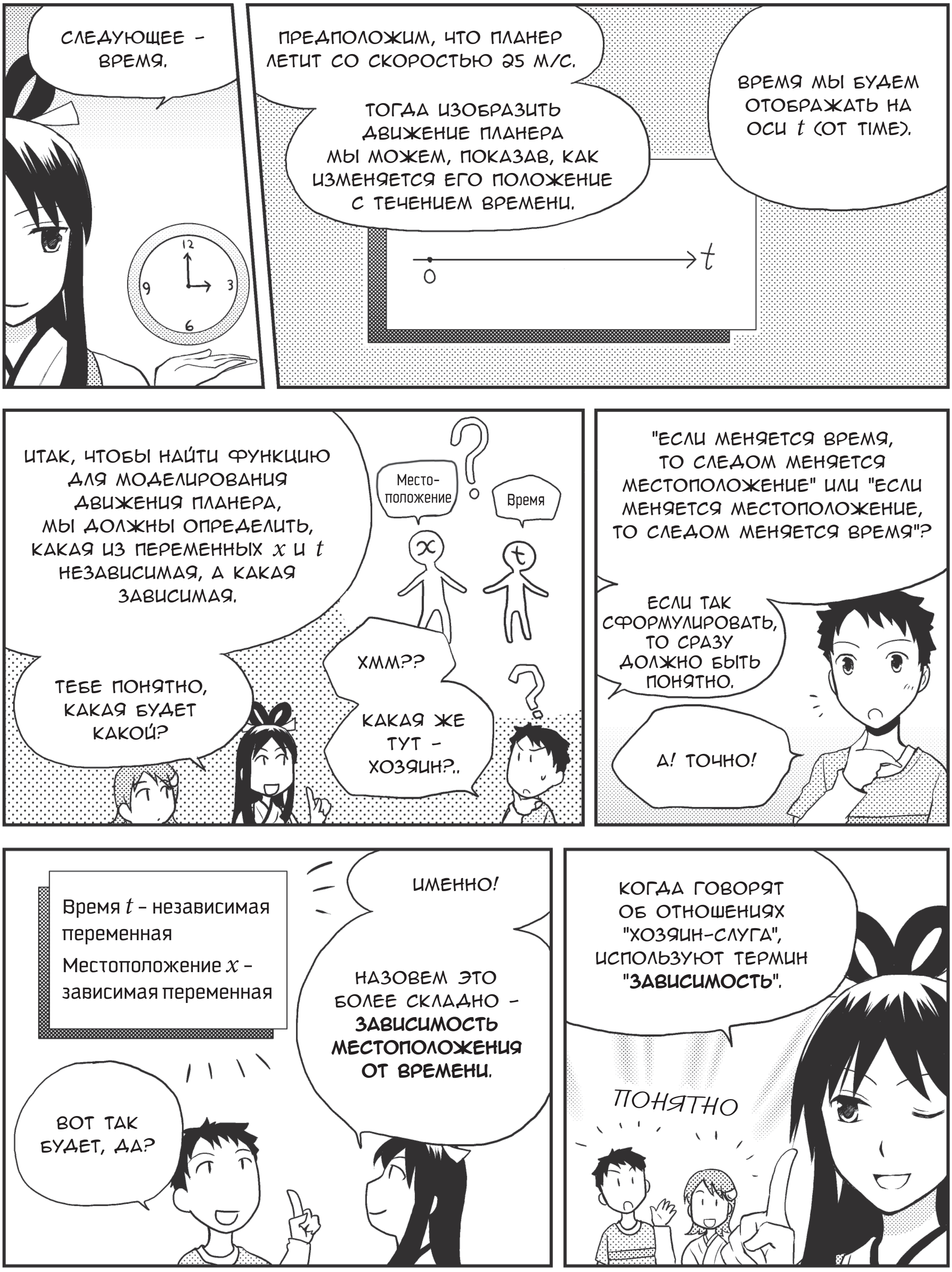

ЭТО...
ЧЕГО?
ИЗВИНИТЕ, Я ХОТЕЛ СПРОСИТЬ, А ПОЧЕМУ МОЖНО МОДЕЛИРОВАТЬ, ИСПОЛЬЗУЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ?
БЛАГОДАРЯ **ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ АНАЛИЗА**.
......
...ТЫ, ВООБЩЕ, ПОНИМАЕШЬ, ЧТО ТАКОЕ ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ?
ОХ
НИКУДА НЕ ГОДИТСЯ...
ПРЕЖДЕ ЧЕМ ПРИСТУПАТЬ К КЛАСИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ, НУЖНО КАК СЛЕДУЕТ УЯСНИТЬ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ!!!
РРРРРР
ПРОСТИТЕ
...ДА

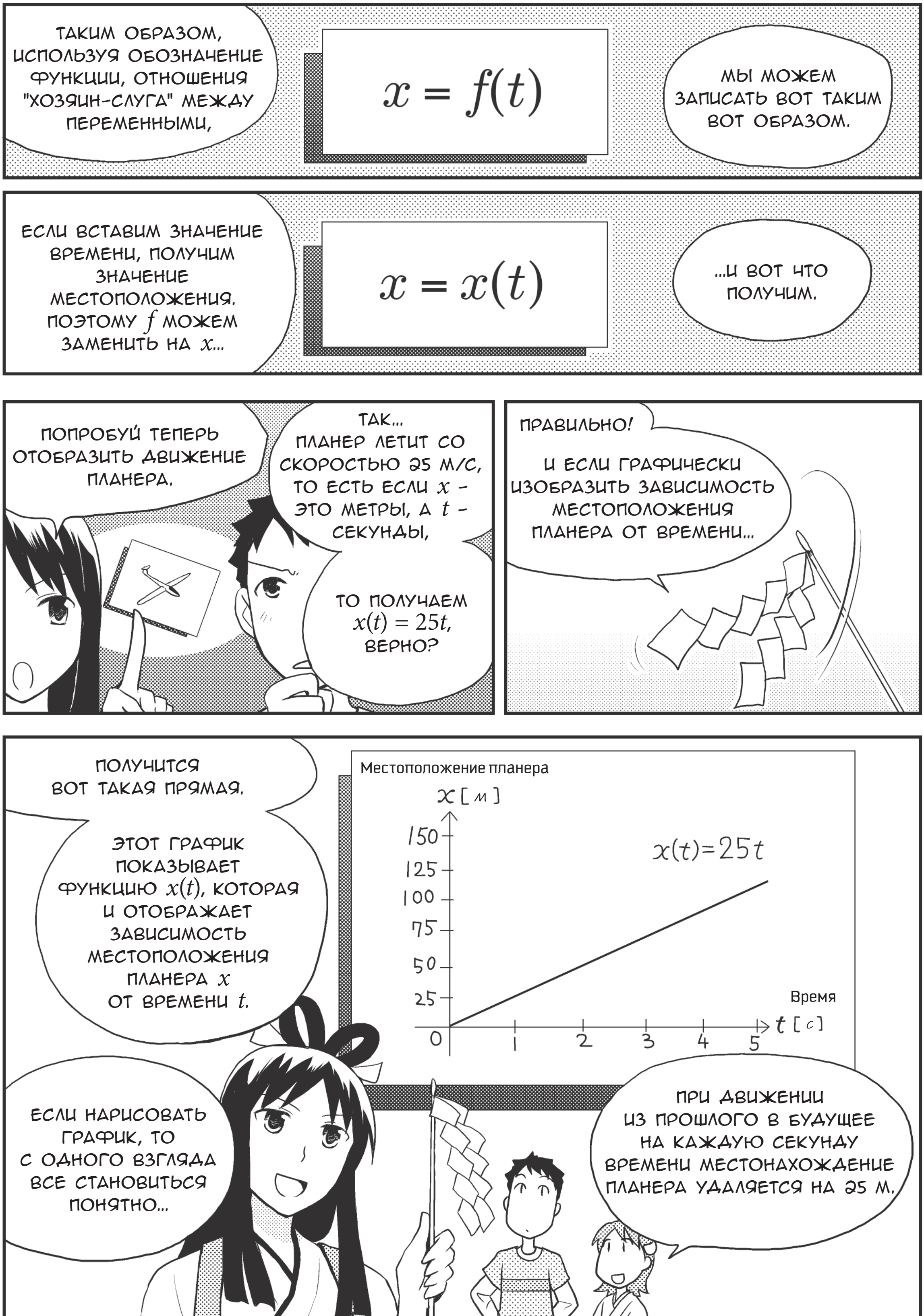
1. ФУНКЦИИ, ПЕРЕМЕННЫЕ И ГРАФИКИ



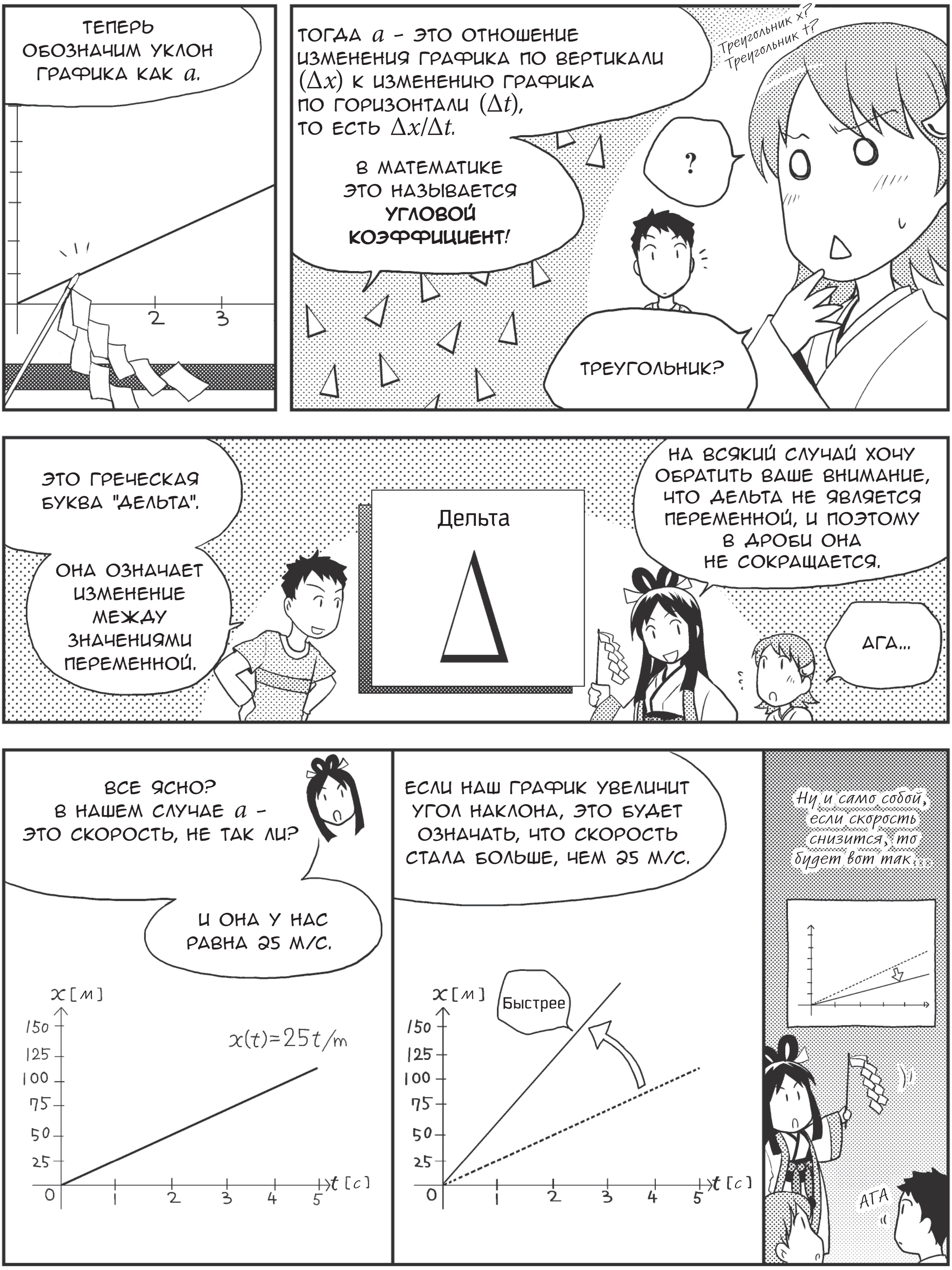

ТЕПЕРЬ ПОДУМАЕМ
О ТОМ, КАКИЕ СЛОВА В МИРЕ МАТЕМАТИКИ ОТРАЖАЮТ ПОНЯТИЯ ИЗ РЕАЛЬНОГО МИРА.
?
О ЧЕМ ЭТО?
...ЭЙ, НЕ НАДО ДЕЛАТЬ ЛИЦО, КАК БУДТО НЕ ПОНИМАЕШЬ, О ЧЕМ ИДЕТ РЕЧЬ!
РАЗВЕ МЫ УЖЕ НЕ НАЧАЛИ ПЕРЕХОД В МИР МАТЕМАТИКИ?
РАСКУСИЛА!!
ДАВАЙ ПОСЕРЬЕЗНЕЕ!!
А-А...
ДА-ДА!!
В ФУНКЦИИ $y = f(x)$ x И y – ЭТО ПЕРЕМЕННЫЕ.
Переменная
Переменная
$y = f(x)$
ПЕРЕМЕННЫЕ – ЭТО БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, КОТОРЫЕ МОГУТ ПРИНИМАТЬ РАЗЛИЧНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ.
АГА...
ВОТ ОНА О ЧЕМ.
ЭТО-ТО Я ПОНИМАЮ
?
ПЕРЕМЕННАЯ МОЖЕТ БЫТЬ ЛЮБЫМ ЧИСЛОМ, КАК ДЖОКЕР В КАРТАХ!
JOKER
Вот как!!
Да уж, привел пример...
НАПРИМЕР, ЭТО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ $y = f(x)$ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ПЕРЕМЕННАЯ y ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ ОТ ПЕРЕМЕННОЙ x.
$y = f(x)$
Функция от переменной x


Но тут нужно быть внимательным.
Хотя и x, и y – переменные, но их положение совсем разное.
Что это значит?
Значение x может меняться как угодно, но когда значение x меняется, то и значение y меняется следом за ним.
Я меняюсь, как хочу!
x
y
Ну, тогда и я меняюсь!
Поэтому x называют независимой переменной, а y – зависимой переменной.
Независимая переменная тут как хозяин, а зависимая переменная как слуга, поэтому отношения между ними можно назвать отношениями хозяина-слуги.
Прямо как сейчас мы с тобой!
x (хозяин)
Давай-давай, учись!!
y (слуга)
Да-да...!!
Хи-хи
Угу...
...Ну, а как насчет отношений между вами, богиня, и Мидзуки?
Если не будете как следует работать, то и развлекаться не будете!
Да, прости...
Ну и как?
...
Так, давай подумаем, какие переменные нам нужны для моделирования движения планера!!
Направление движения планера обозначим осью x.
Числа, обозначающие позицию, называют **координатами**, для их обозначения часто используют буквы x, y и z.
x
0
Направление движения планера
Ага, на мой вопрос-то не ответила!

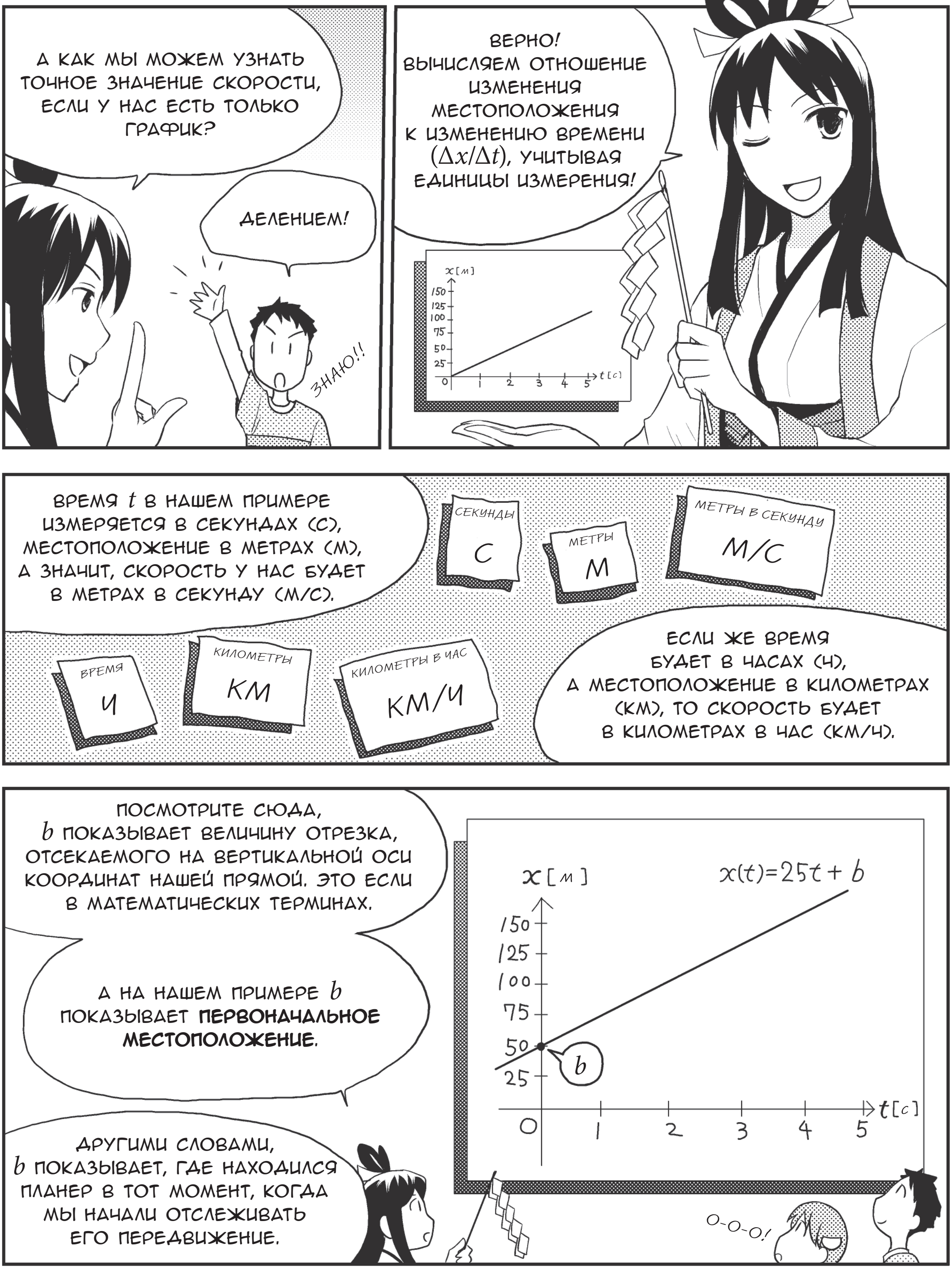

СЛЕДУЮЩЕЕ – ВРЕМЯ.
ПРЕДПОЛОЖИМ, ЧТО ПЛАНЕР ЛЕТИТ СО СКОРОСТЬЮ 25 М/С.
ТОГДА ИЗОБРАЗИТЬ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕРА МЫ МОЖЕМ, ПОКАЗАВ, КАК ИЗМЕНЯЕТСЯ ЕГО ПОЛОЖЕНИЕ С ТЕЧЕНИЕМ ВРЕМЕНИ.
ВРЕМЯ МЫ БУДЕМ ОТОБРАЖАТЬ НА ОСИ t (ОТ TIME).
0
t
ИТАК, ЧТОБЫ НАЙТИ ФУНКЦИЮ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕРА, МЫ ДОЛЖНЫ ОПРЕДЕЛИТЬ, КАКАЯ ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ x И t НЕЗАВИСИМАЯ, А КАКАЯ ЗАВИСИМАЯ.
Местоположение
Время
x
t
ТЕБЕ ПОНЯТНО, КАКАЯ БУДЕТ КАКОЙ?
ХММ??
КАКАЯ ЖЕ ТУТ – ХОЗЯИН?..
"ЕСЛИ МЕНЯЕТСЯ ВРЕМЯ, ТО СЛЕДОМ МЕНЯЕТСЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ" ИЛИ "ЕСЛИ МЕНЯЕТСЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ, ТО СЛЕДОМ МЕНЯЕТСЯ ВРЕМЯ"?
ЕСЛИ ТАК СФОРМУЛИРОВАТЬ, ТО СРАЗУ ДОЛЖНО БЫТЬ ПОНЯТНО.
А! ТОЧНО!
Время t – независимая переменная
Местоположение x – зависимая переменная
ВОТ ТАК БУДЕТ, ДА?
ИМЕННО!
НАЗОВЕМ ЭТО БОЛЕЕ СКЛАДНО – **ЗАВИСИМОСТЬ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОТ ВРЕМЕНИ.**
КОГДА ГОВОРЯТ ОБ ОТНОШЕНИЯХ "ХОЗЯИН-СЛУГА", ИСПОЛЬЗУЮТ ТЕРМИН "**ЗАВИСИМОСТЬ**".
ПОНЯТНО

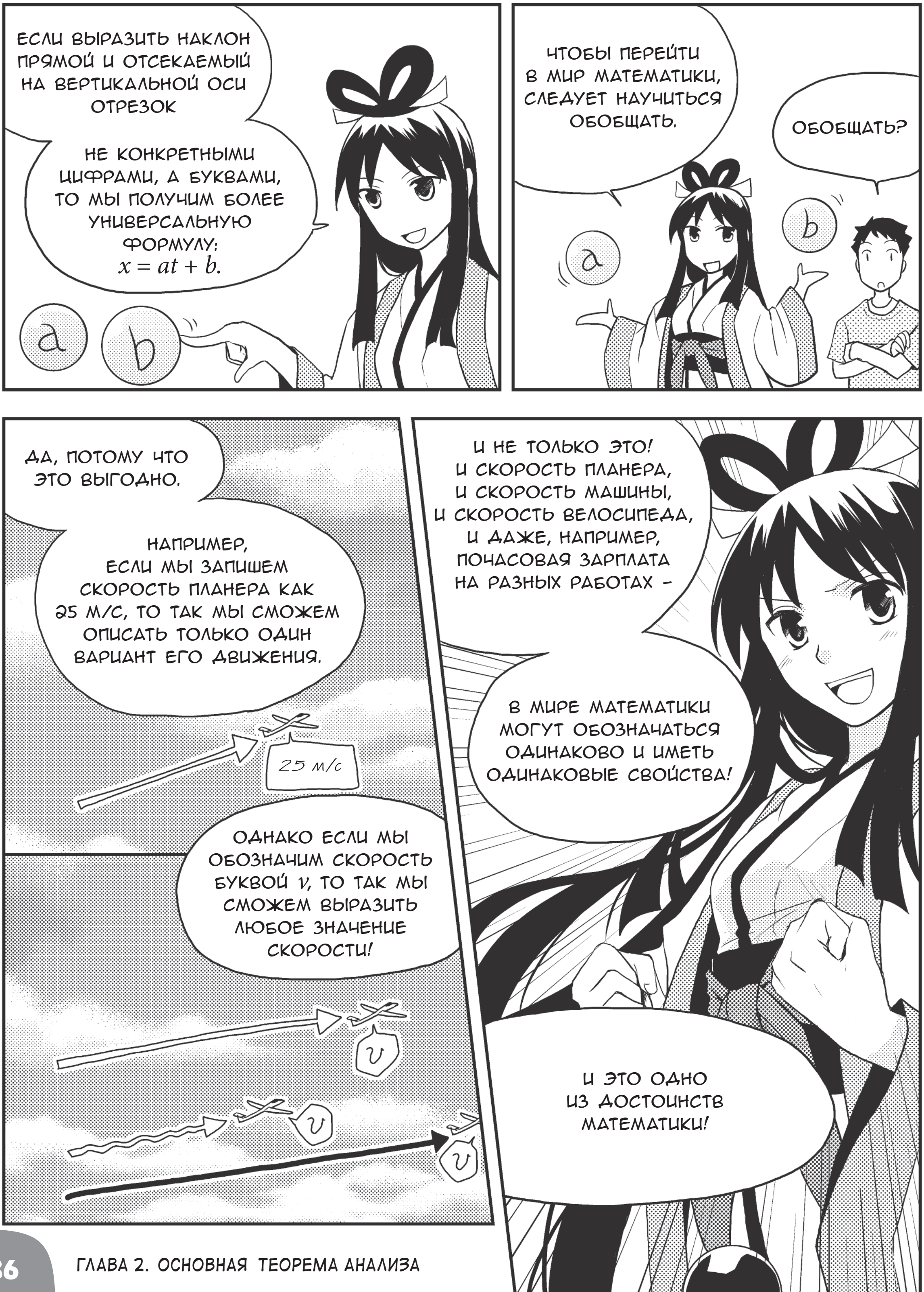


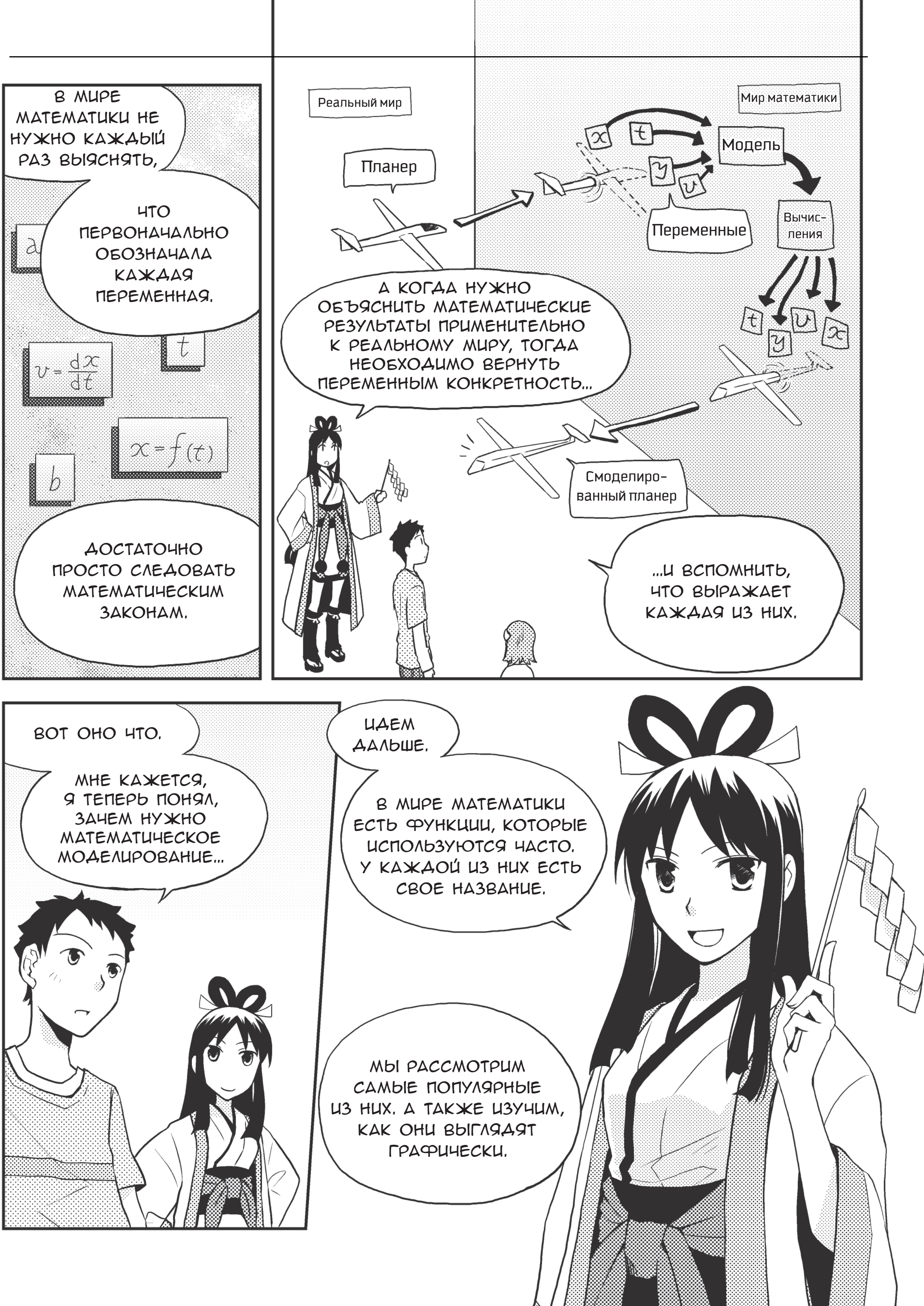
ТАКИМ ОБРАЗОМ, ИСПОЛЬЗУЯ ОБОЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ "ХОЗЯИН-СЛУГА" МЕЖДУ ПЕРЕМЕННЫМИ,
$x = f(t)$
МЫ МОЖЕМ ЗАПИСАТЬ ВОТ ТАКИМ ВОТ ОБРАЗОМ.
ЕСЛИ ВСТАВИМ ЗНАЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ, ПОЛУЧИМ ЗНАЧЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ. ПОЭТОМУ f МОЖЕМ ЗАМЕНИТЬ НА x...
$x = x(t)$
...И ВОТ ЧТО ПОЛУЧИМ.
ПОПРОБУЙ ТЕПЕРЬ ОТОБРАЗИТЬ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕРА.
ТАК... ПЛАНЕР ЛЕТИТ СО СКОРОСТЬЮ 25 М/С, ТО ЕСТЬ ЕСЛИ x - ЭТО МЕТРЫ, А t - СЕКУНДЫ,
ТО ПОЛУЧАЕМ $x(t) = 25t$, ВЕРНО?
ПРАВИЛЬНО!
И ЕСЛИ ГРАФИЧЕСКИ ИЗОБРАЗИТЬ ЗАВИСИМОСТЬ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПЛАНЕРА ОТ ВРЕМЕНИ...
ПОЛУЧИТСЯ ВОТ ТАКАЯ ПРЯМАЯ.
ЭТОТ ГРАФИК ПОКАЗЫВАЕТ ФУНКЦИЮ $x(t)$, КОТОРАЯ И ОТОБРАЖАЕТ ЗАВИСИМОСТЬ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПЛАНЕРА x ОТ ВРЕМЕНИ t.
Местоположение планера
x [м]
150
125
100
75
50
25
0
$x(t)=25t$
Время
t [с]
1
2
3
4
5
ЕСЛИ НАРИСОВАТЬ ГРАФИК, ТО С ОДНОГО ВЗГЛЯДА ВСЕ СТАНОВИТЬСЯ ПОНЯТНО...
ПРИ ДВИЖЕНИИ ИЗ ПРОШЛОГО В БУДУЩЕЕ НА КАЖДУЮ СЕКУНДУ ВРЕМЕНИ МЕСТОНАХОЖДЕНИЕ ПЛАНЕРА УДАЛЯЕТСЯ НА 25 М.



ТЕПЕРЬ ОБОЗНАЧИМ УКЛОН ГРАФИКА КАК a.
2
3
ТОГДА a – ЭТО ОТНОШЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ГРАФИКА ПО ВЕРТИКАЛИ (Δx) К ИЗМЕНЕНИЮ ГРАФИКА ПО ГОРИЗОНТАЛИ (Δt), ТО ЕСТЬ $\Delta x/\Delta t$.
В МАТЕМАТИКЕ ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ **УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ**!
Треугольник x? Треугольник t?
?
ТРЕУГОЛЬНИК?
ЭТО ГРЕЧЕСКАЯ БУКВА "ДЕЛЬТА".
ОНА ОЗНАЧАЕТ ИЗМЕНЕНИЕ МЕЖДУ ЗНАЧЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ.
Дельта
Δ
НА ВСЯКИЙ СЛУЧАЙ ХОЧУ ОБРАТИТЬ ВАШЕ ВНИМАНИЕ, ЧТО ДЕЛЬТА НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРЕМЕННОЙ, И ПОЭТОМУ В ДРОБИ ОНА НЕ СОКРАЩАЕТСЯ.
АГА...
ВСЕ ЯСНО? В НАШЕМ СЛУЧАЕ a – ЭТО СКОРОСТЬ, НЕ ТАК ЛИ?
И ОНА У НАС РАВНА 25 М/С.
x [м]
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t [с]
x(t)=25t/m
ЕСЛИ НАШ ГРАФИК УВЕЛИЧИТ УГОЛ НАКЛОНА, ЭТО БУДЕТ ОЗНАЧАТЬ, ЧТО СКОРОСТЬ СТАЛА БОЛЬШЕ, ЧЕМ 25 М/С.
Быстрее
x [м]
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t [с]
Ну и само собой, если скорость снизится, то будет вот так...
АГА


А КАК МЫ МОЖЕМ УЗНАТЬ ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ СКОРОСТИ, ЕСЛИ У НАС ЕСТЬ ТОЛЬКО ГРАФИК?
ДЕЛЕНИЕМ!
ЗНАЮ!!
ВЕРНО! ВЫЧИСЛЯЕМ ОТНОШЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ К ИЗМЕНЕНИЮ ВРЕМЕНИ ($\Delta x/\Delta t$), УЧИТЫВАЯ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ!
x [м]
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t [с]
ВРЕМЯ t В НАШЕМ ПРИМЕРЕ ИЗМЕРЯЕТСЯ В СЕКУНДАХ (С), МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ В МЕТРАХ (М), А ЗНАЧИТ, СКОРОСТЬ У НАС БУДЕТ В МЕТРАХ В СЕКУНДУ (М/С).
СЕКУНДЫ
С
МЕТРЫ
М
МЕТРЫ В СЕКУНДУ
М/С
ВРЕМЯ
Ч
КИЛОМЕТРЫ
КМ
КИЛОМЕТРЫ В ЧАС
КМ/Ч
ЕСЛИ ЖЕ ВРЕМЯ БУДЕТ В ЧАСАХ (Ч), А МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ В КИЛОМЕТРАХ (КМ), ТО СКОРОСТЬ БУДЕТ В КИЛОМЕТРАХ В ЧАС (КМ/Ч).
ПОСМОТРИТЕ СЮДА, b ПОКАЗЫВАЕТ ВЕЛИЧИНУ ОТРЕЗКА, ОТСЕКАЕМОГО НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ КООРДИНАТ НАШЕЙ ПРЯМОЙ. ЭТО ЕСЛИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНАХ.
А НА НАШЕМ ПРИМЕРЕ b ПОКАЗЫВАЕТ **ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ**.
x [м]
$x(t)=25t+b$
150
125
100
75
50
25
0
1
2
3
4
5
t [с]
b
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, b ПОКАЗЫВАЕТ, ГДЕ НАХОДИЛСЯ ПЛАНЕР В ТОТ МОМЕНТ, КОГДА МЫ НАЧАЛИ ОТСЛЕЖИВАТЬ ЕГО ПЕРЕДВИЖЕНИЕ.
О-О-О!


ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ НАКЛОН ПРЯМОЙ И ОТСЕКАЕМЫЙ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ ОТРЕЗОК
НЕ КОНКРЕТНЫМИ ЦИФРАМИ, А БУКВАМИ, ТО МЫ ПОЛУЧИМ БОЛЕЕ УНИВЕРСАЛЬНУЮ ФОРМУЛУ: $x = at + b$.
a
b
ЧТОБЫ ПЕРЕЙТИ В МИР МАТЕМАТИКИ, СЛЕДУЕТ НАУЧИТЬСЯ ОБОБЩАТЬ.
ОБОБЩАТЬ?
a
b
ДА, ПОТОМУ ЧТО ЭТО ВЫГОДНО.
НАПРИМЕР, ЕСЛИ МЫ ЗАПИШЕМ СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА КАК 25 М/С, ТО ТАК МЫ СМОЖЕМ ОПИСАТЬ ТОЛЬКО ОДИН ВАРИАНТ ЕГО ДВИЖЕНИЯ.
25 м/с
ОДНАКО ЕСЛИ МЫ ОБОЗНАЧИМ СКОРОСТЬ БУКВОЙ v, ТО ТАК МЫ СМОЖЕМ ВЫРАЗИТЬ ЛЮБОЕ ЗНАЧЕНИЕ СКОРОСТИ!
v
v
v
И НЕ ТОЛЬКО ЭТО! И СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА, И СКОРОСТЬ МАШИНЫ, И СКОРОСТЬ ВЕЛОСИПЕДА, И ДАЖЕ, НАПРИМЕР, ПОЧАСОВАЯ ЗАРПЛАТА НА РАЗНЫХ РАБОТАХ –
В МИРЕ МАТЕМАТИКИ МОГУТ ОБОЗНАЧАТЬСЯ ОДИНАКОВО И ИМЕТЬ ОДИНАКОВЫЕ СВОЙСТВА!
И ЭТО ОДНО ИЗ ДОСТОИНСТВ МАТЕМАТИКИ!


В мире математики не нужно каждый раз выяснять,
что первоначально обозначала каждая переменная.
$v = \frac{dx}{dt}$
$x = f(t)$
Достаточно просто следовать математическим законам.
Реальный мир
Мир математики
Планер
Модель
Переменные
Вычис-ления
Смоделиро-ванный планер
А когда нужно объяснить математические результаты применительно к реальному миру, тогда необходимо вернуть переменным конкретность…
…и вспомнить, что выражает каждая из них.
Вот оно что.
Мне кажется, я теперь понял, зачем нужно математическое моделирование…
Идем дальше.
В мире математики есть функции, которые используются часто. У каждой из них есть свое название.
Мы рассмотрим самые популярные из них. А также изучим, как они выглядят графически.

Экспоненциальные функции

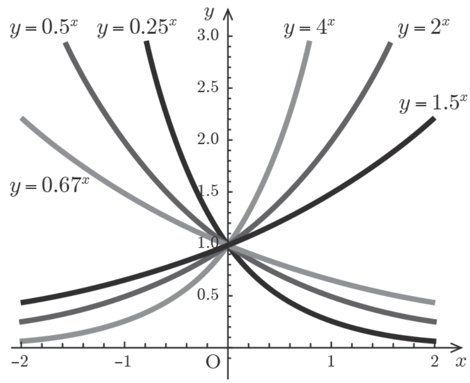
Монотонно возрастающая или монотонно убывающая

Если a – это константа, то функция вида

$y(x) = ax$

называется экспоненциальной.

Как ведут себя экспоненциальные функции, показано на картинке справа.



Функция будет экспоненциальной при любом значении a, но в дифференциальных уравнениях нам особенно важно следующее значение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045235\cdots$$

Подставив это значение, называемое e, мы получаем функцию:

$y(x) = e^x$.

Представленное здесь число e называют также **числом Непера**.

Далее представлены основные свойства экспоненциальных функций:

$$a^x a^y = a^{x+y},\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\quad (a^x)^y = a^{xy},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{a^y}.$$

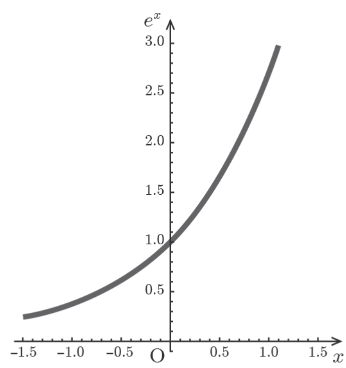
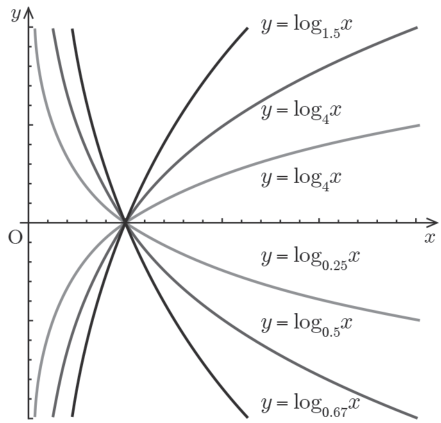


График функции e^x

Логарифмические функции

Постоянно возрастающая или убывающая с постепенно замедляющимся темпом



Функция, обратная экспоненциальной функции, называется логарифмической.

Другими словами, если, преобразуя следующую формулу:

$x = a^y$,

мы напишем формулу для нахождения y:

$y(x) = \log_a x$,

то как раз получим логарифмическую функцию.

Как ведут себя логарифмические функции, показано на картинке справа.

Константа a здесь называется основанием логарифма. Если a равно 10, то такой логарифм $\log_{10}x$ называется десятичным, если же a равно e, то такой логарифм $\log_e x$ называется натуральным.

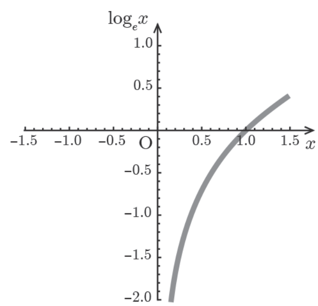


График функции $\log_e x$

В работе с дифференциальными уравнениями нам чаще всего будут нужны именно натуральные логарифмы. Натуральные логарифмы упрощенно записываются вот так:

$y(x) = \ln x$.

А основные свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

выглядят вот так.

■ Тригонометрические функции

То возрастают, то убывают

Выраженные следующим образом соотношения сторон и угла прямоугольного треугольника (смотрите картинку ниже):

$$\sin x = \frac{c}{a}, \quad \cos x = \frac{b}{a}$$

определяют тригонометрические функции. Эти функции являются периодическими с периодом, равным 2π. Поэтому они часто используются для моделирования периодически повторяющихся процессов.

А из теоремы Пифагора получаем следующее равенство[1]:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

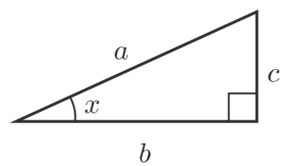
Если же теперь мы обозначим:

$$p = \cos x, \quad q = \sin x,$$

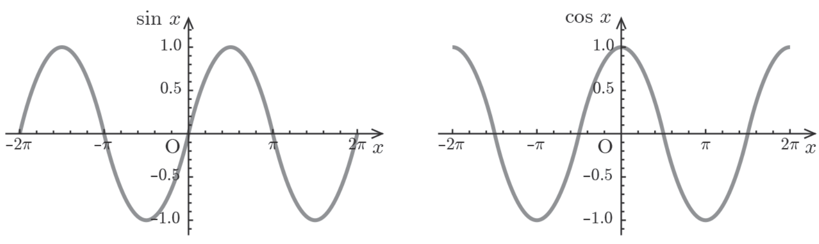
то получим равенство:

$$p^2 + q^2 = 1,$$

и в этом случае p и q будут соответствовать координатам окружности с радиусом 1 на плоскости.



Стороны и углы прямоугольного треугольника



Графики тригонометрических функций. Слева $\sin x$*, справа* $\cos x$

---

[1] Используя формулу Эйлера можем записать так: $\cos^2 x + \sin^2 x = ((e^{ix} + e^{-iz})/2)^2 + ((e^{ix} - e^{-iz})/2i)2 = (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2)/4 - (e^{2ix} + e^{-2ix} - 2)/4 = 1$.

Гиперболические функции

Их свойства похожи на свойства тригонометрических функций

Хотя с первого взгляда кажется, что экспоненциальная и тригонометрическая функции никак между собой не связаны, но, исходя из формулы Эйлера[2]

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$,

оказывается, что благодаря комплексным числам между ними существует неразрывная связь. Если использовать формулу Эйлера вот так:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

то эта связь становится очевидной. Функции, которые определяются формулами, очень похожими на предыдущие, называются гиперболическими.

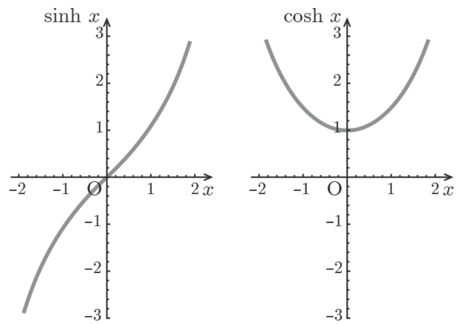
Вот эти формулы гиперболических функций:

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Они проиллюстрированы на картинке справа.

Преобразуем формулу и вот что получаем:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1.$$



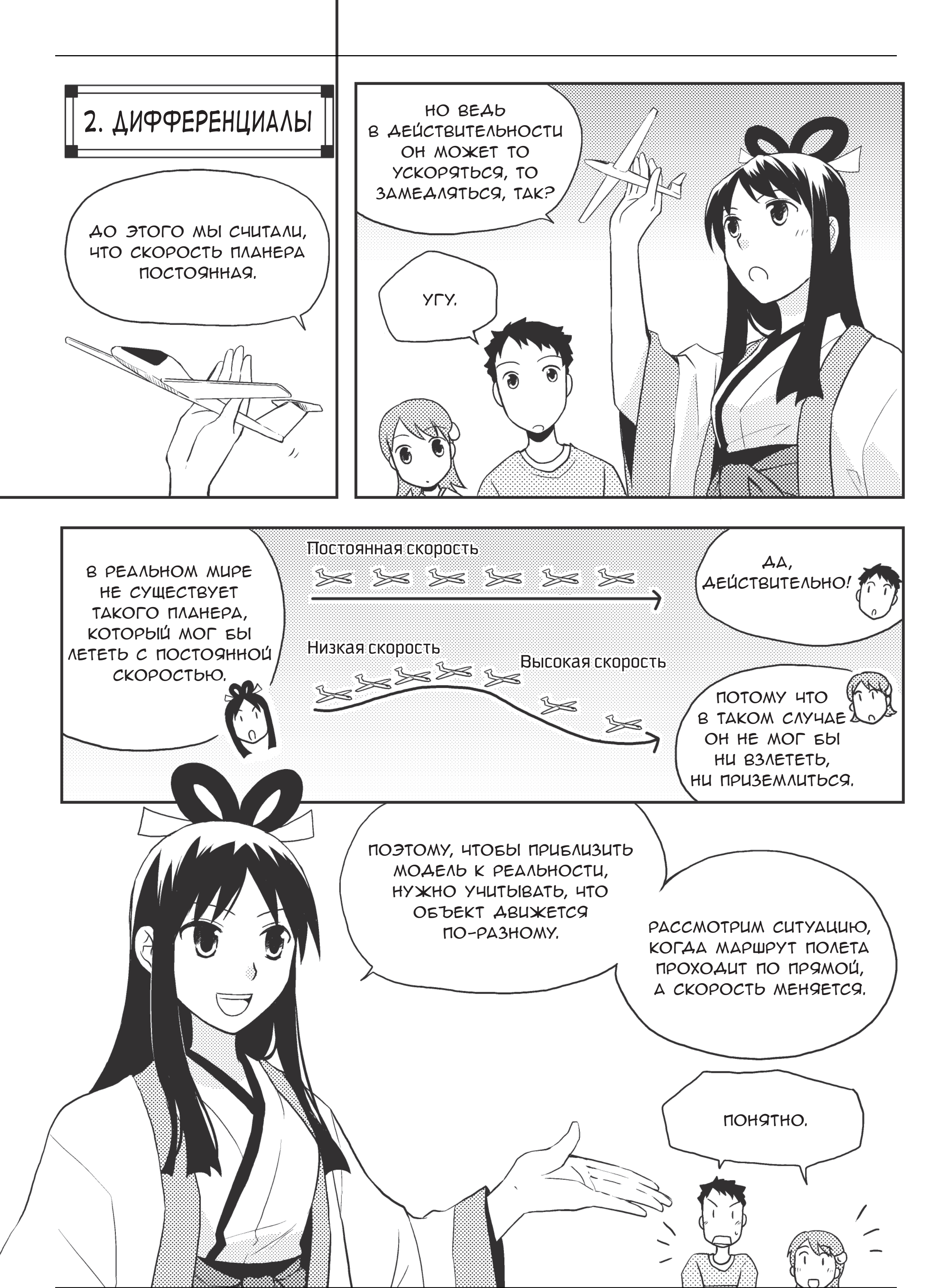
Графики гиперболических функций. Слева функции – $\sinh x$*, справа –* $\cosh x$

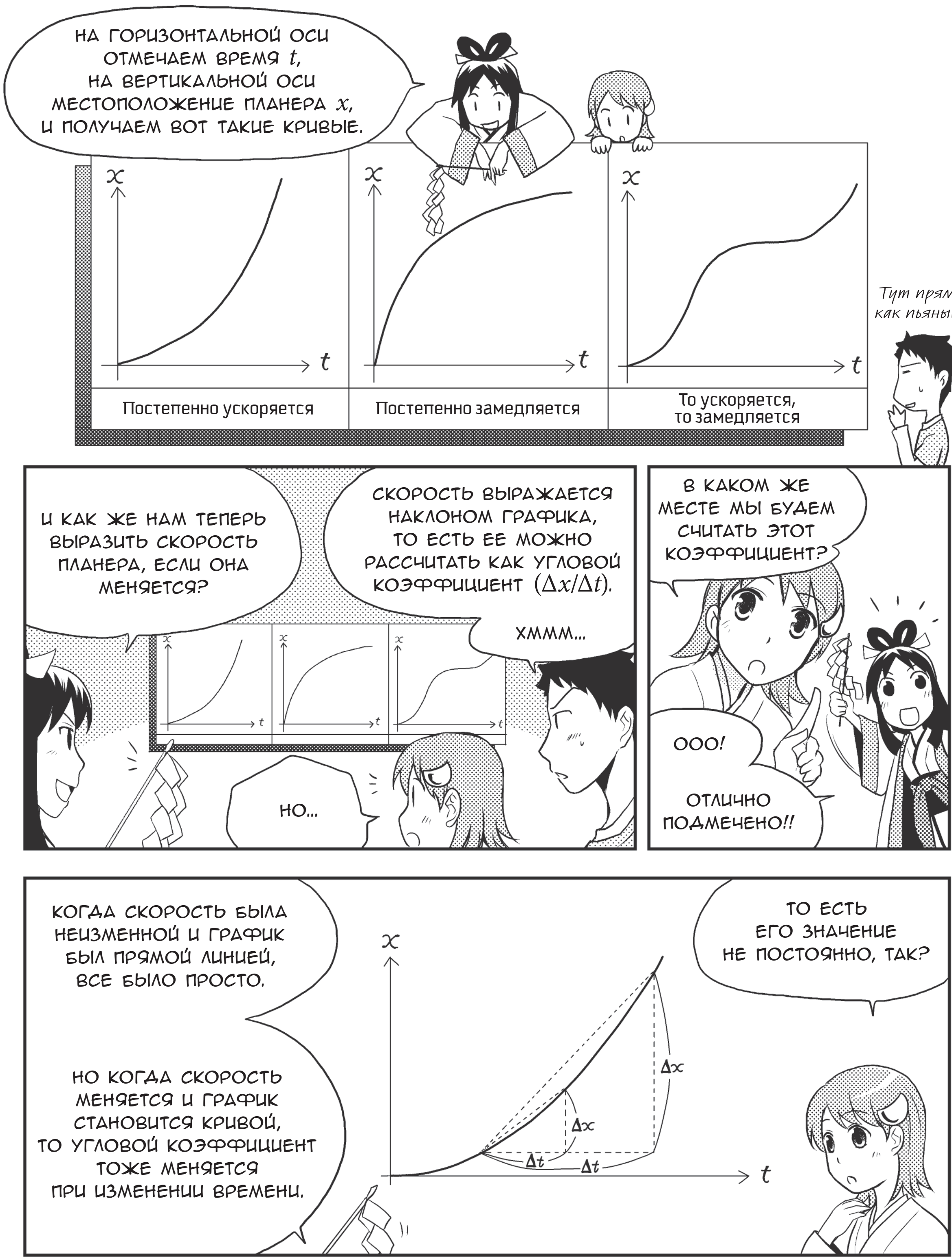
Если теперь мы обозначим $p = \cosh x$, а $q = \sinh x$, то получим, что $p^2 - q^2 = 1$.

А p и q будут соответствовать координатам гиперболы на плоскости. Поэтому cosh называется **гиперболическим косинусом**, а sinh – **гиперболическим синусом** (у нас они чаще обозначаются как ch и как sh). Но хотя названия и похожи на тригонометрические функции, и некоторые общие свойства у функций есть, но все-таки эти функции совсем разные.

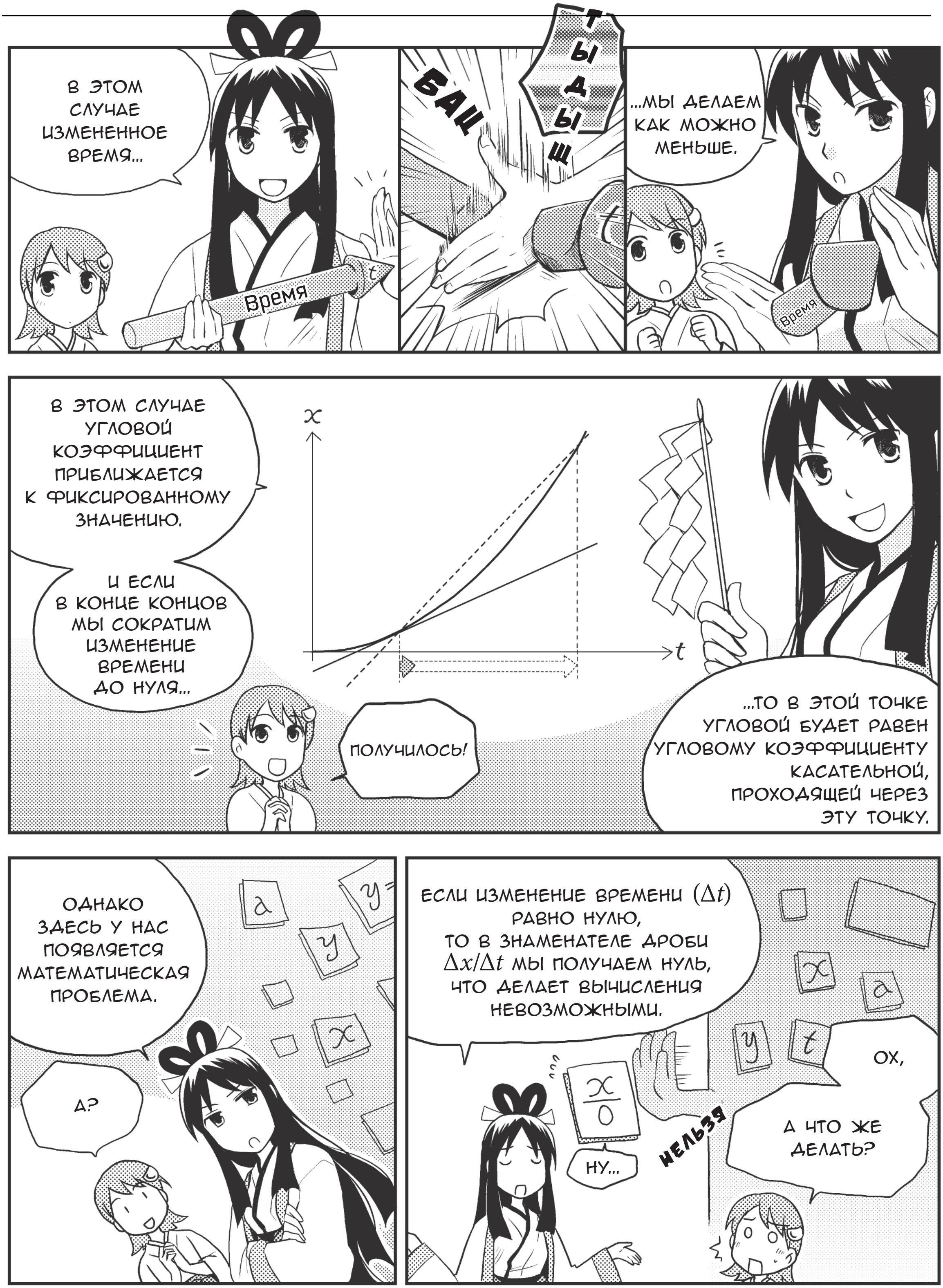
---

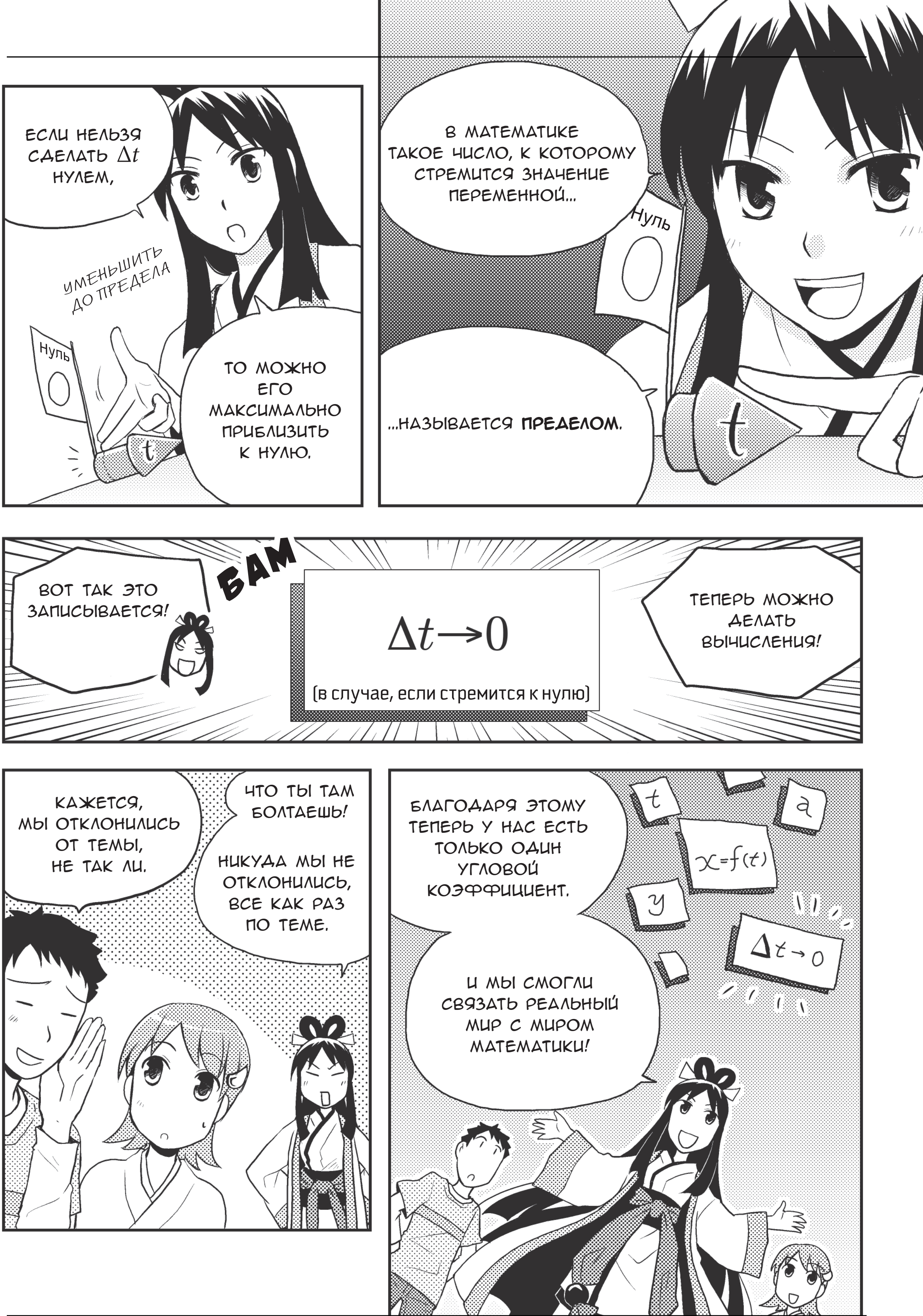
[2] Экспоненциальную и тригонометрическую функции каждую по отдельности можно разложить в ряд. И тогда в случае, если $x = \pi$, получаем мистическую формулу $e^{i\pi} + 1 = 0$, которая связывает между собой числа e, π, 1, i и 0. Это удивительно, что если иррациональное число e возвести в степень иррационального числа π, умноженного на мнимую единицу i, и прибавить к полученному результату 1, то в итоге получим значение 0.

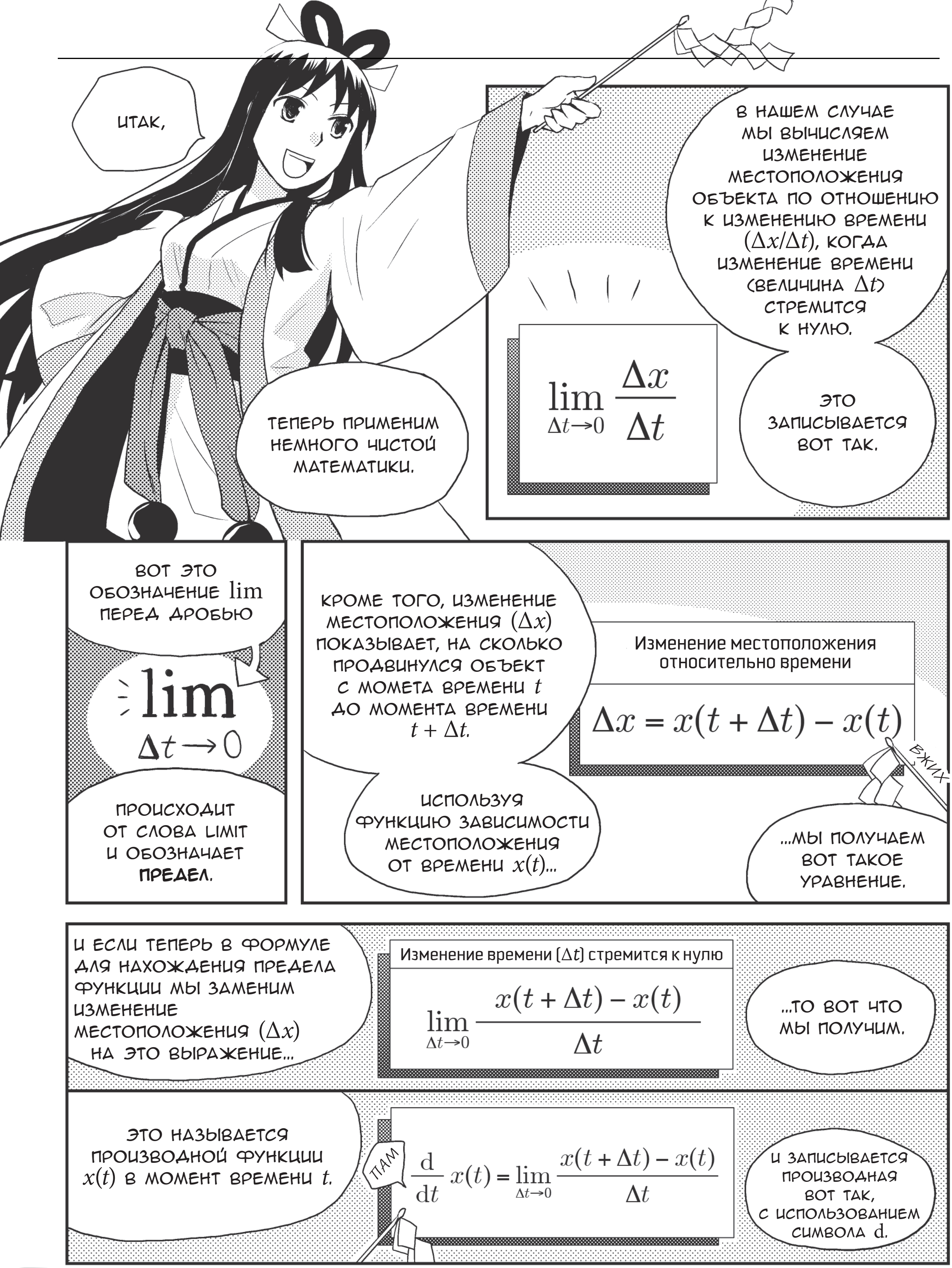

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ
ДО ЭТОГО МЫ СЧИТАЛИ, ЧТО СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА ПОСТОЯННАЯ.
НО ВЕДЬ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ ОН МОЖЕТ ТО УСКОРЯТЬСЯ, ТО ЗАМЕДЛЯТЬСЯ, ТАК?
УГУ.
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ НЕ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОГО ПЛАНЕРА, КОТОРЫЙ МОГ БЫ ЛЕТЕТЬ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ.
Постоянная скорость
Низкая скорость
Высокая скорость
ДА, ДЕЙСТВИТЕЛЬНО!
ПОТОМУ ЧТО В ТАКОМ СЛУЧАЕ ОН НЕ МОГ БЫ НИ ВЗЛЕТЕТЬ, НИ ПРИЗЕМЛИТЬСЯ.
ПОЭТОМУ, ЧТОБЫ ПРИБЛИЗИТЬ МОДЕЛЬ К РЕАЛЬНОСТИ, НУЖНО УЧИТЫВАТЬ, ЧТО ОБЪЕКТ ДВИЖЕТСЯ ПО-РАЗНОМУ.
РАССМОТРИМ СИТУАЦИЮ, КОГДА МАРШРУТ ПОЛЕТА ПРОХОДИТ ПО ПРЯМОЙ, А СКОРОСТЬ МЕНЯЕТСЯ.
ПОНЯТНО.



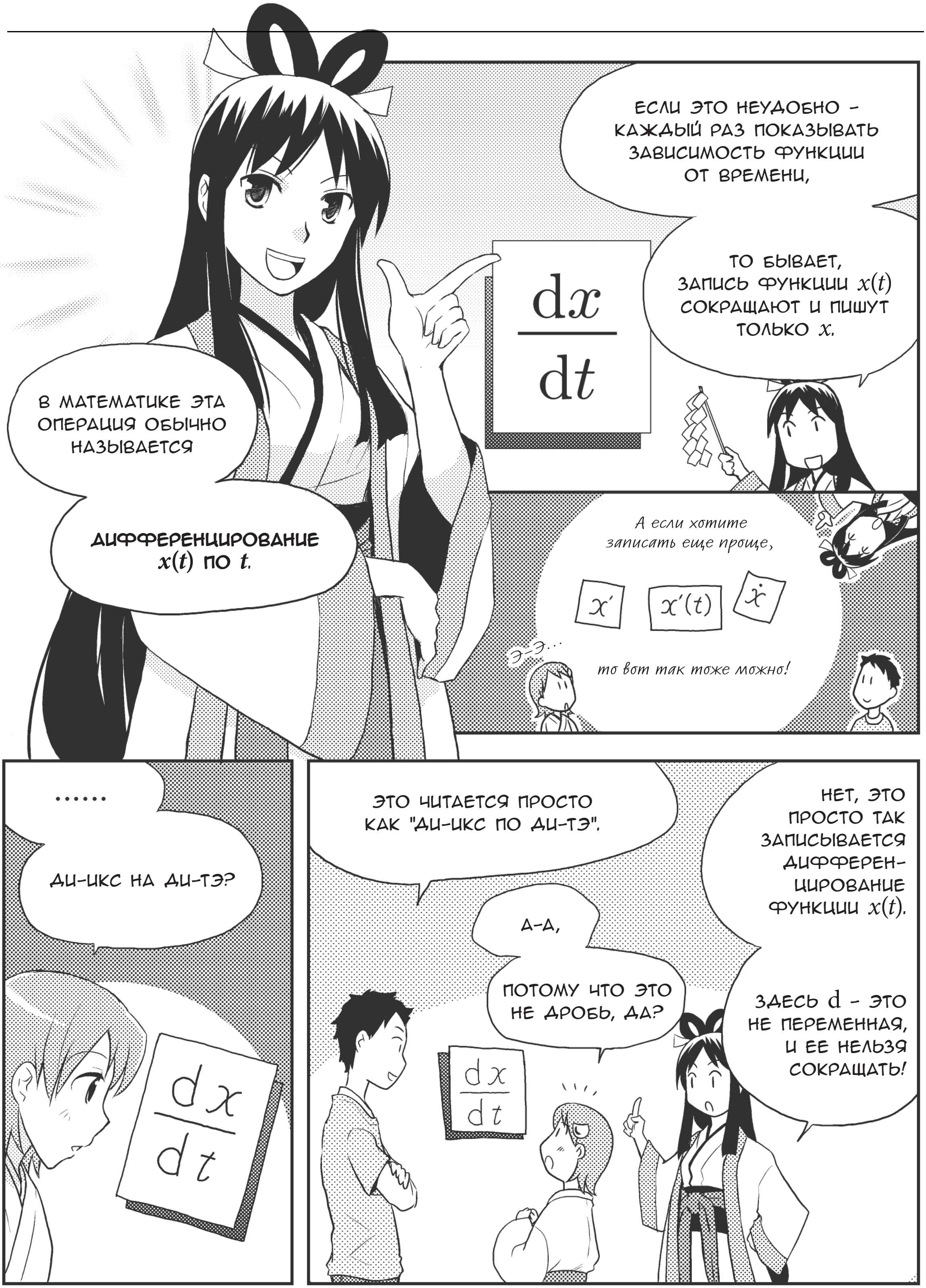
НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ОТМЕЧАЕМ ВРЕМЯ t, НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ПЛАНЕРА x, И ПОЛУЧАЕМ ВОТ ТАКИЕ КРИВЫЕ.
x
t
Постепенно ускоряется
Постепенно замедляется
То ускоряется, то замедляется
Тут прям как пьяный
И КАК ЖЕ НАМ ТЕПЕРЬ ВЫРАЗИТЬ СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА, ЕСЛИ ОНА МЕНЯЕТСЯ?
СКОРОСТЬ ВЫРАЖАЕТСЯ НАКЛОНОМ ГРАФИКА, ТО ЕСТЬ ЕЕ МОЖНО РАССЧИТАТЬ КАК УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ $(\Delta x/\Delta t)$.
ХМММ...
НО...
В КАКОМ ЖЕ МЕСТЕ МЫ БУДЕМ СЧИТАТЬ ЭТОТ КОЭФФИЦИЕНТ?
ООО!
ОТЛИЧНО ПОДМЕЧЕНО!!
КОГДА СКОРОСТЬ БЫЛА НЕИЗМЕННОЙ И ГРАФИК БЫЛ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ, ВСЕ БЫЛО ПРОСТО.
НО КОГДА СКОРОСТЬ МЕНЯЕТСЯ И ГРАФИК СТАНОВИТСЯ КРИВОЙ, ТО УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТОЖЕ МЕНЯЕТСЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВРЕМЕНИ.
Δx
Δx
Δt
Δt
ТО ЕСТЬ ЕГО ЗНАЧЕНИЕ НЕ ПОСТОЯННО, ТАК?


В этом случае измененное время...
Время
t
БАЦ
ТЫДЫЩ
...мы делаем как можно меньше.
Время
В этом случае угловой коэффициент приближается к фиксированному значению.
И если в конце концов мы сократим изменение времени до нуля...
x
t
...то в этой точке угловой будет равен угловому коэффициенту касательной, проходящей через эту точку.
Получилось!
Однако здесь у нас появляется математическая проблема.
А?
Если изменение времени (Δt) равно нулю, то в знаменателе дроби $\Delta x/\Delta t$ мы получаем нуль, что делает вычисления невозможными.
$\frac{x}{0}$
Ну...
НЕЛЬЗЯ
Ох, а что же делать?

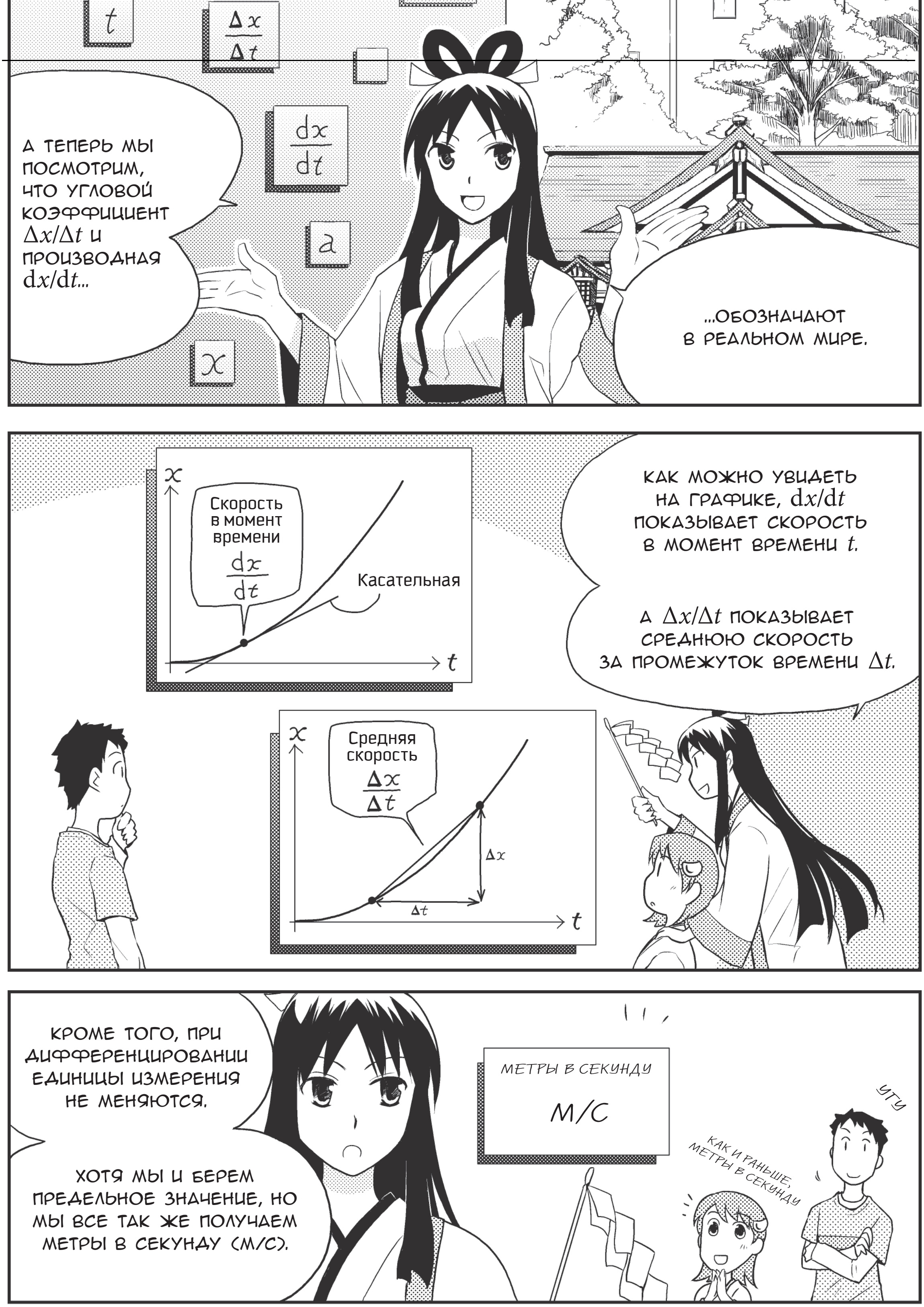

Если нельзя сделать Δt нулем,
уменьшить до предела
Нуль
0
t
то можно его максимально приблизить к нулю.
В математике такое число, к которому стремится значение переменной...
Нуль
0
...называется **пределом**.
t
Вот так это записывается!
БАМ
$\Delta t \to 0$
(в случае, если стремится к нулю)
Теперь можно делать вычисления!
Кажется, мы отклонились от темы, не так ли.
Что ты там болтаешь!
Никуда мы не отклонились, все как раз по теме.
Благодаря этому теперь у нас есть только один угловой коэффициент.
t
a
$x=f(t)$
y
$\Delta t \to 0$
И мы смогли связать реальный мир с миром математики!

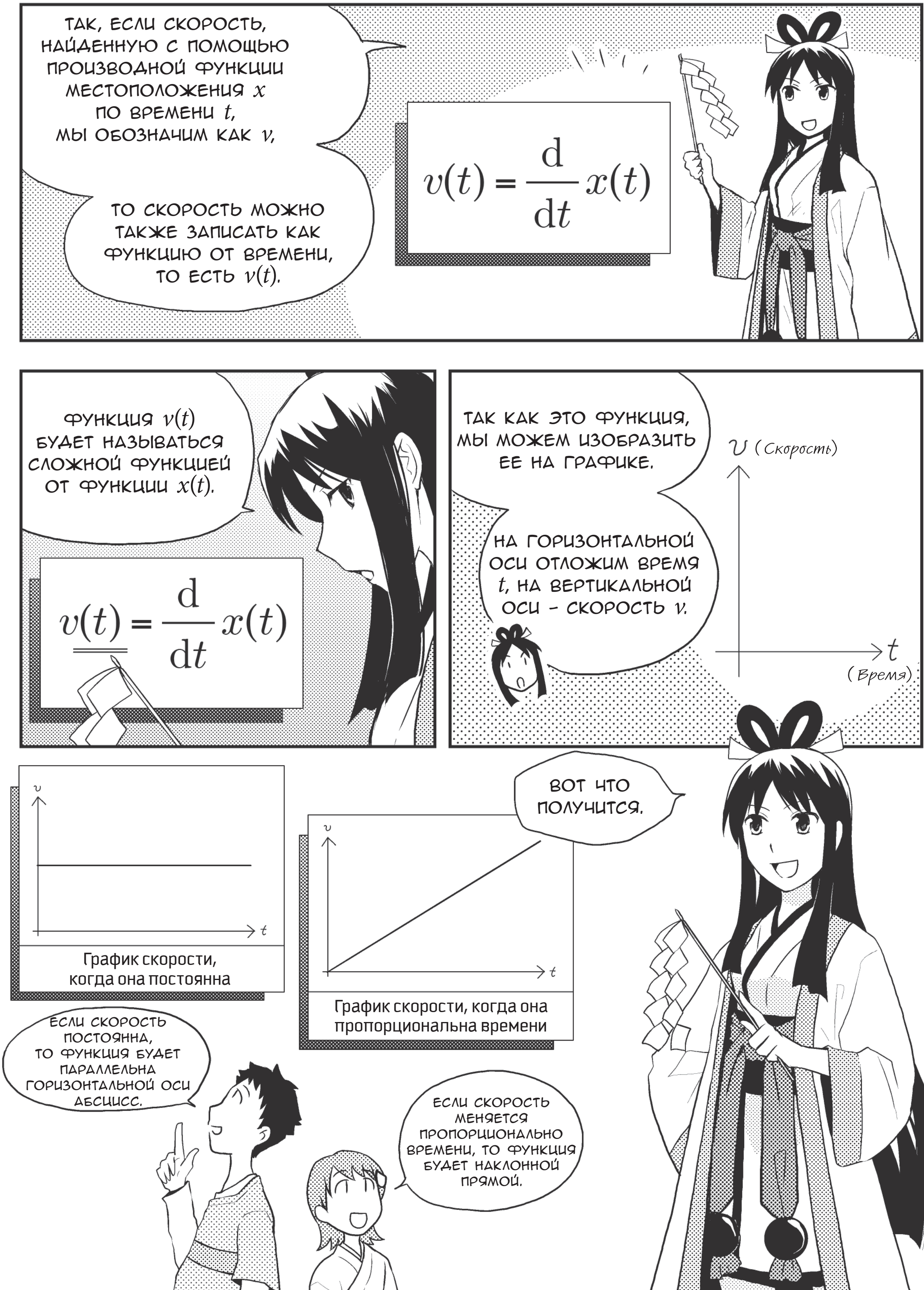


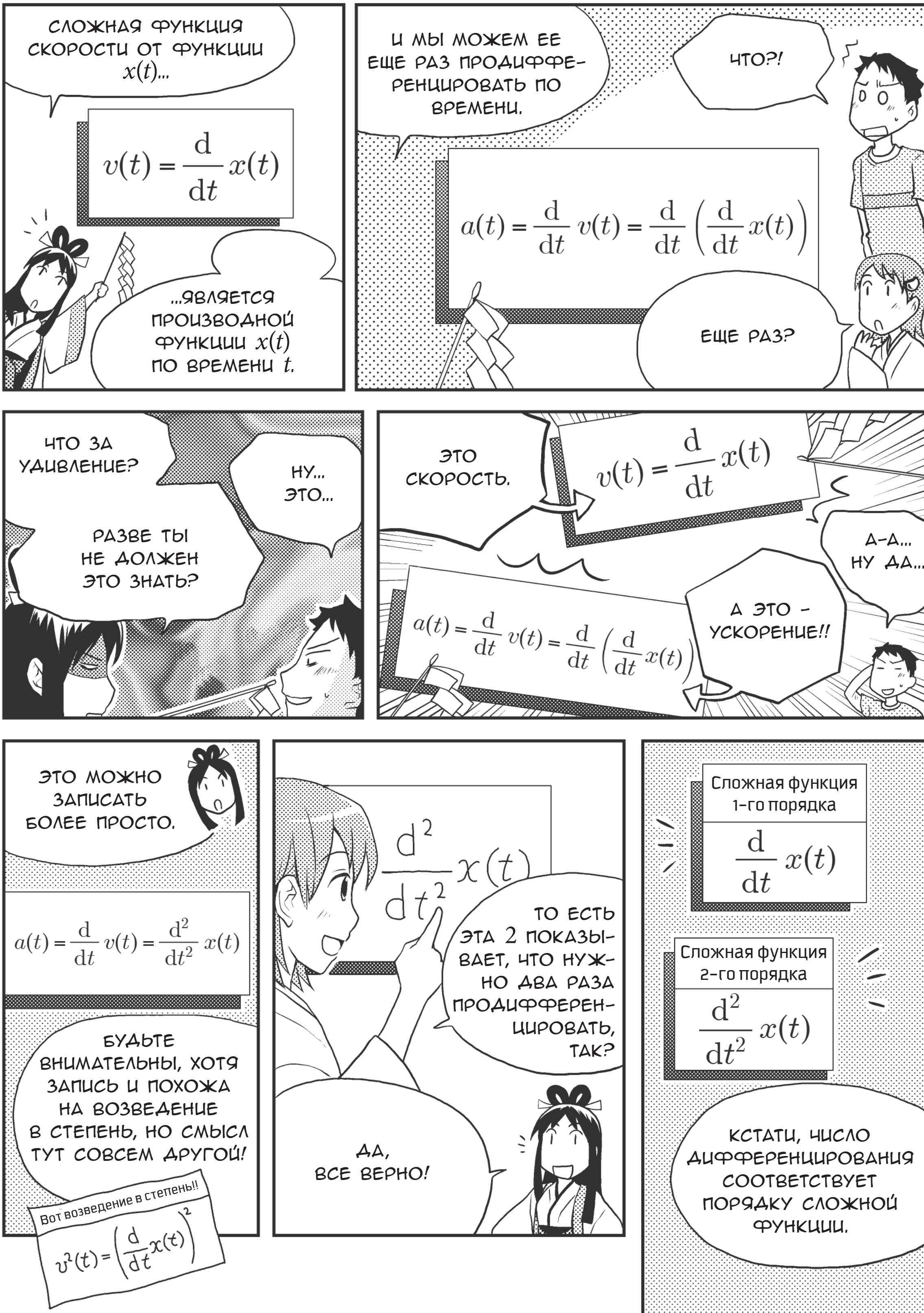
Итак,
теперь применим немного чистой математики.
В нашем случае мы вычисляем изменение местоположения объекта по отношению к изменению времени ($\Delta x/\Delta t$), когда изменение времени (величина Δt) стремится к нулю.
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
Это записывается вот так.
Вот это обозначение lim перед дробью
$\lim\limits_{\Delta t \to 0}$
происходит от слова limit и обозначает **предел**.
Кроме того, изменение местоположения (Δx) показывает, на сколько продвинулся объект с момета времени t до момента времени $t + \Delta t$.
Используя функцию зависимости местоположения от времени $x(t)$...
Изменение местоположения относительно времени
$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$
Вжих
...мы получаем вот такое уравнение.
И если теперь в формуле для нахождения предела функции мы заменим изменение местоположения (Δx) на это выражение...
Изменение времени (Δt) стремится к нулю
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
...то вот что мы получим.
Это называется производной функции $x(t)$ в момент времени t.
ПАМ
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$
И записывается производная вот так, с использованием символа d.



ЕСЛИ ЭТО НЕУДОБНО - КАЖДЫЙ РАЗ ПОКАЗЫВАТЬ ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ,
ТО БЫВАЕТ, ЗАПИСЬ ФУНКЦИИ $x(t)$ СОКРАЩАЮТ И ПИШУТ ТОЛЬКО x.
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
В МАТЕМАТИКЕ ЭТА ОПЕРАЦИЯ ОБЫЧНО НАЗЫВАЕТСЯ
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ $x(t)$ ПО t.
А если хотите записать еще проще,
x'
$x'(t)$
$\dot{x}$
Э-Э...
то вот так тоже можно!
......
ДИ-ИКС НА ДИ-ТЭ?
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
ЭТО ЧИТАЕТСЯ ПРОСТО КАК "ДИ-ИКС ПО ДИ-ТЭ".
НЕТ, ЭТО ПРОСТО ТАК ЗАПИСЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕН-ЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ $x(t)$.
А-А,
ПОТОМУ ЧТО ЭТО НЕ ДРОБЬ, ДА?
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$
ЗДЕСЬ d - ЭТО НЕ ПЕРЕМЕННАЯ, И ЕЕ НЕЛЬЗЯ СОКРАЩАТЬ!


t
$\frac{\Delta x}{\Delta t}$
$\frac{dx}{dt}$
a
x
А теперь мы посмотрим, что угловой коэффициент $\Delta x/\Delta t$ и производная dx/dt...
...обозначают в реальном мире.
Как можно увидеть на графике, dx/dt показывает скорость в момент времени t.
А $\Delta x/\Delta t$ показывает среднюю скорость за промежуток времени Δt.
x
Скорость в момент времени $\frac{dx}{dt}$
Касательная
t
x
Средняя скорость $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
Δx
Δt
t
Кроме того, при дифференцировании единицы измерения не меняются.
Хотя мы и берем предельное значение, но мы все так же получаем метры в секунду (м/с).
Метры в секунду
м/с
Как и раньше, метры в секунду
Угу


Так, если скорость, найденную с помощью производной функции местоположения x по времени t, мы обозначим как v,
то скорость можно также записать как функцию от времени, то есть $v(t)$.
$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$
Функция $v(t)$ будет называться сложной функцией от функции $x(t)$.
$\underline{\underline{v(t)}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$
Так как это функция, мы можем изобразить ее на графике.
На горизонтальной оси отложим время t, на вертикальной оси – скорость v.
v (Скорость)
t (Время)
Вот что получится.
v
t
График скорости, когда она постоянна
v
t
График скорости, когда она пропорциональна времени
Если скорость постоянна, то функция будет параллельна горизонтальной оси абсцисс.
Если скорость меняется пропорционально времени, то функция будет наклонной прямой.



Сложная функция скорости от функции $x(t)$...
$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
...является производной функции $x(t)$ по времени t.
И мы можем ее еще раз продифференцировать по времени.
$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)$
Что?!
Еще раз?
Что за удивление?
Ну... это...
Разве ты не должен это знать?
Это скорость.
$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$
А-а... ну да...
$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)$
А это – ускорение!!
Это можно записать более просто.
$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$
Будьте внимательны, хотя запись и похожа на возведение в степень, но смысл тут совсем другой!
Вот возведение в степень!!
$v^2(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2$
$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$
То есть эта 2 показывает, что нужно два раза продифференцировать, так?
Да, все верно!
Сложная функция 1-го порядка
$\frac{d}{dt}x(t)$
Сложная функция 2-го порядка
$\frac{d^2}{dt^2}x(t)$
Кстати, число дифференцирования соответствует порядку сложной функции.

А сейчас оставим на время планер и немного займемся дифференциальными вычислениями, хорошо?

Хорошо!

Мидзуки, ты прямо рвешься в бой, да?

Существуют разные правила дифференцирования функции $f(t)$. Рассмотрим некоторые из них на примерах.
Для начала рассмотрим случай с константой:

$f(t) = 1$.

Следуя определению производной:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1-1}{\Delta t} = 0,$$

в результате получаем нуль.
Далее рассмотрим случай, когда функция пропорциональна аргументу (t).

$f(t) = t$.

Следуя определению производной, получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t+\Delta t - t}{\Delta t} = 1.$$

Когда функция пропорциональна аргументу в квадрате:

$f(t) = t^2$,

в этом случае:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) = 2t.$$

В результате получим функцию $2t$.

Ну что, более ли менее усвоили?

Хм...

Может, если записать подряд, будет более понятно:

$$f(t)=1 \;\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=0;$$

$$f(t)=t \;\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=1;$$

$$f(t)=t^2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=2t.$$

Ага! Теперь проще запомнить...

Теперь мы можем воспользоваться преимуществом мира математики и обобщить пример. Так, если мы заменим конкретное число в показателе степени на переменную n, то получим:

$f(t) = t^n$.

Здесь преобразования будут немного сложными, но:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^n - t^n}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t \quad + nt^{n-1}\Delta t + \ldots + nt\Delta t^{n-1} + \Delta t^n) - t^n}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{nt^{n-1}\Delta t + \ldots + nt\Delta t^{n-1} + \Delta t^n}{\Delta t}\\ &= nt^{n-1}.\end{aligned}$$

Получим функцию[3] от t в степени (n – 1):

$$f(t)=t^n \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=nt^{n-1}.$$

Это так называемая формула дифференцирования:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^n = nt^{n-1}.$$

Да?

[3] Когда в формуле встречается «...», это показывает, что есть сокращенные элементы. Так как n – переменная, то мы не можем знать точное количество элементов и не можем записать их в формуле. В этом случае в формуле ставится многоточие, означающее, что мы хоть и не можем записать, но понимаем, что там пропущено.

Формулы – это удобные математические инструменты. Благодаря формулам нам не нужно каждый раз делать вычисления с самого начала. В этом можно убедиться, если вывести какую-то формулу самому. Зная формулы, не нужно каждый раз прокладывать новую дорогу, так как уже найден путь, ведущий к цели, которым может воспользоваться любой.

Любой?

Да. И это важный момент. Математические вычисления порой выглядят сложными, но на деле оказываются гораздо проще.
В учебниках вам встретятся различные формулы дифференцирования, обязательно попробуйте вывести их самостоятельно.

Вот, например, некоторые из них.

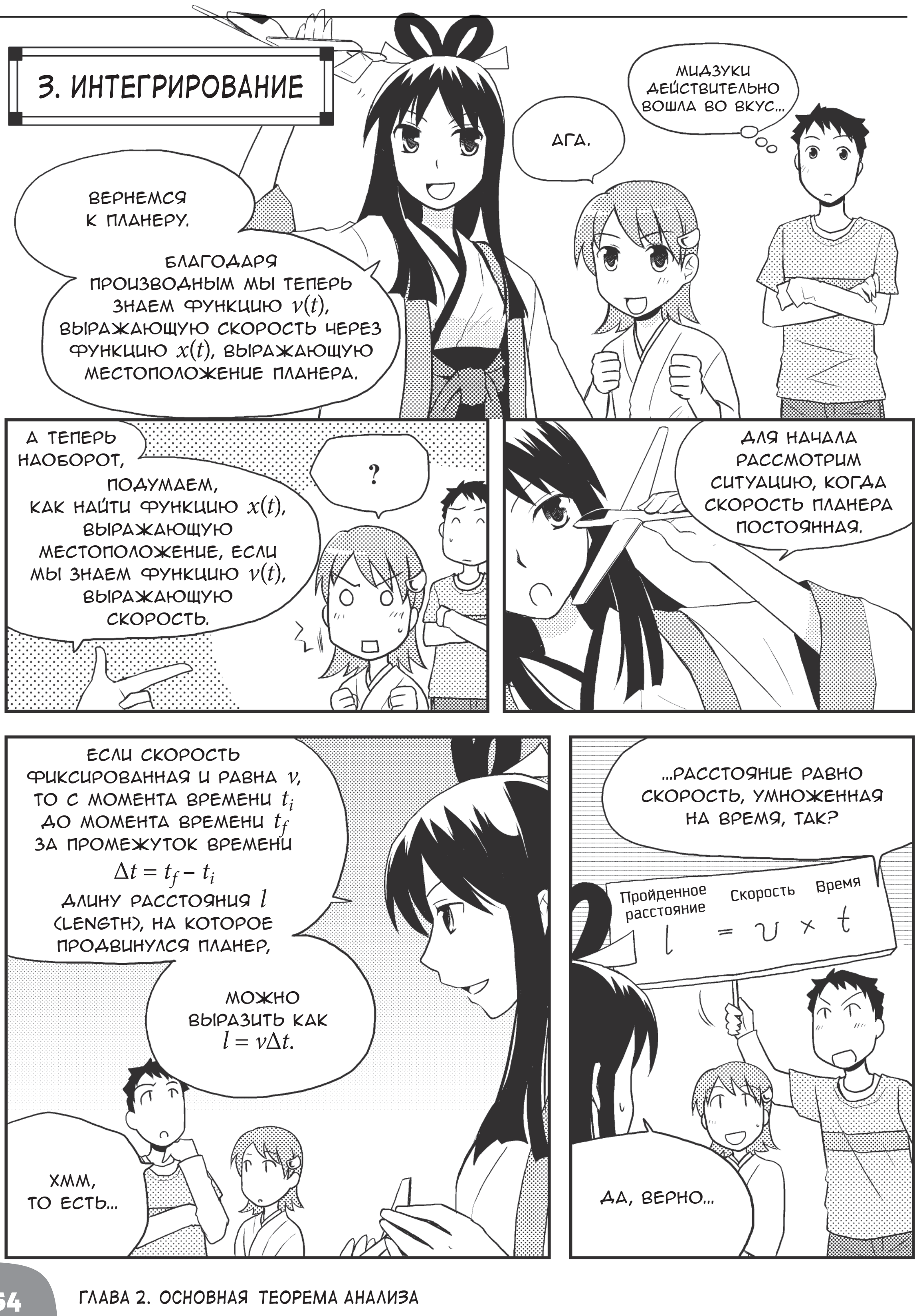
$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t=\cos t;\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t=\sin t;\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{t}=e^{t}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

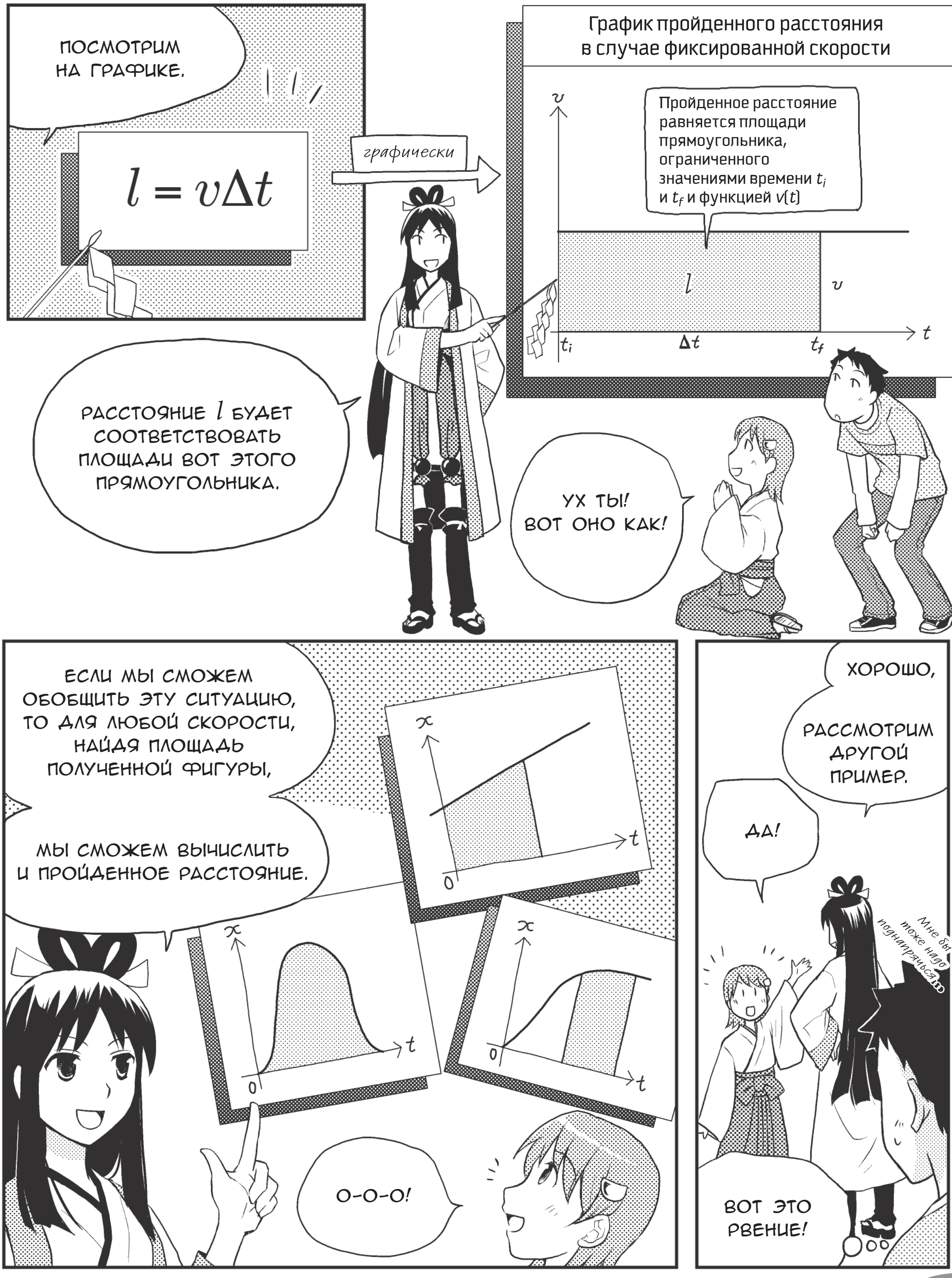
А ниже представлены основные свойства дифференцирования:

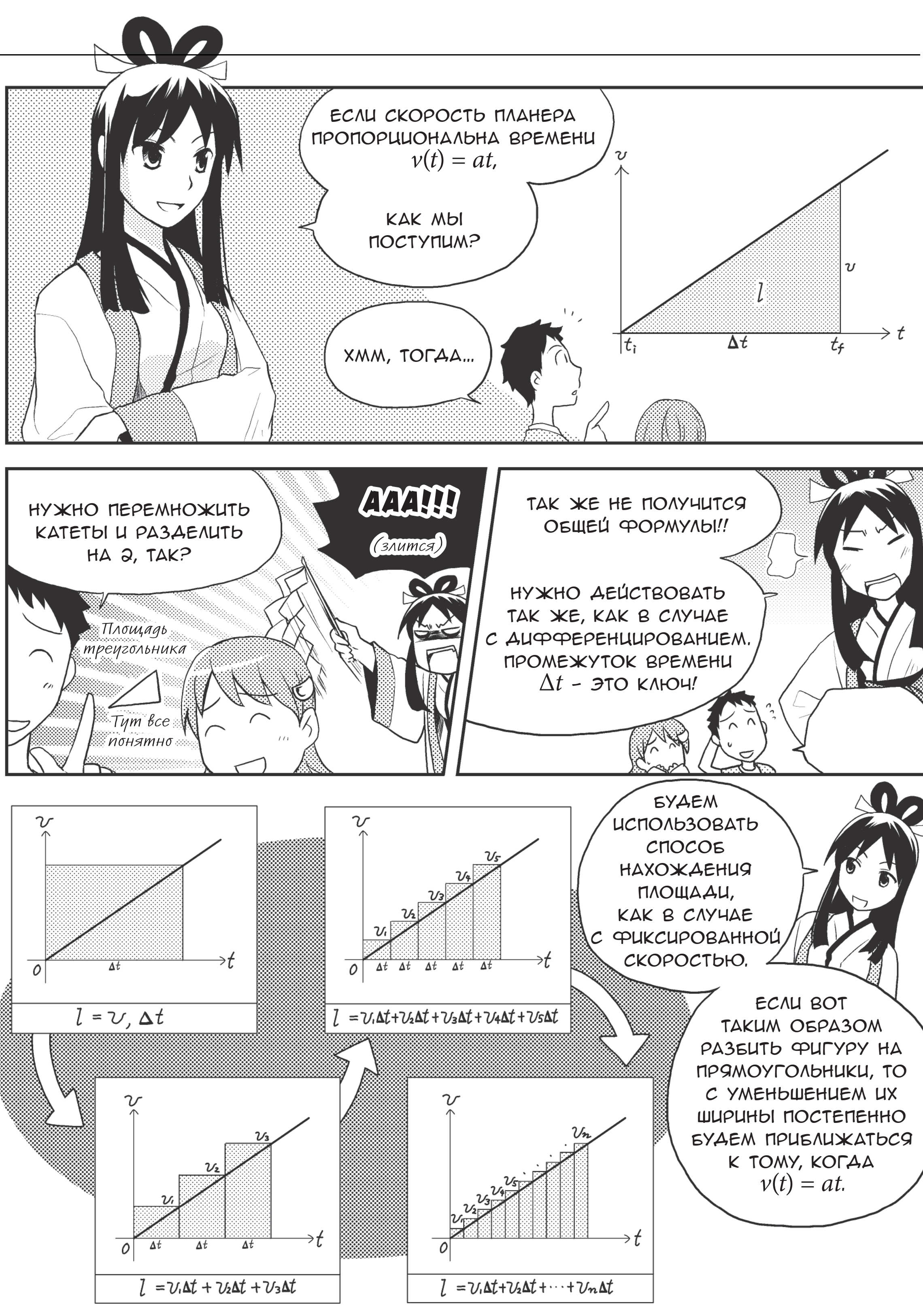
$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha f(t)+\beta g(t)=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t);\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)g(t)=g(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t);\\
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}(y=f(x),x=f^{-1}(x)).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

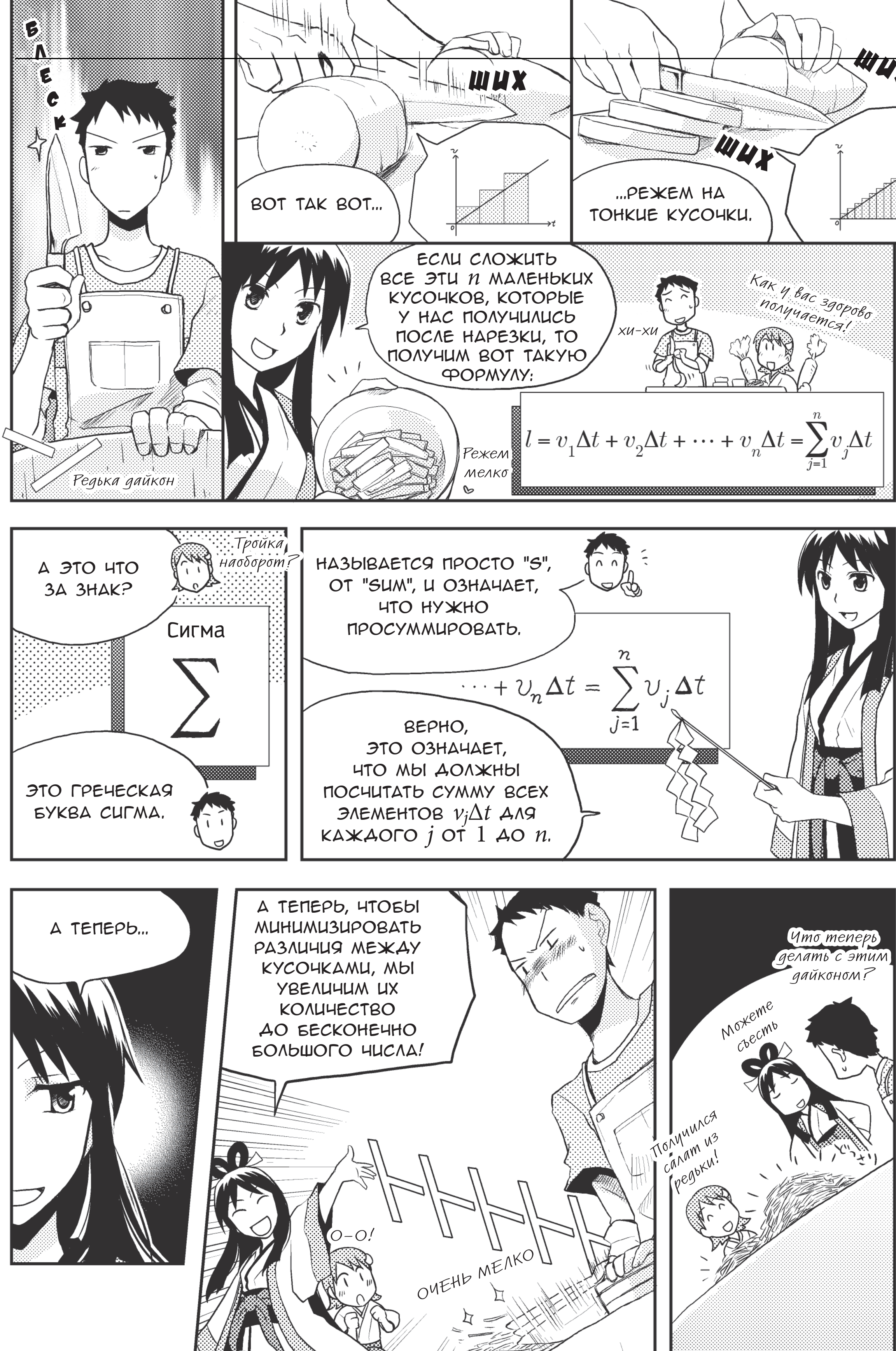
Ага, ага.

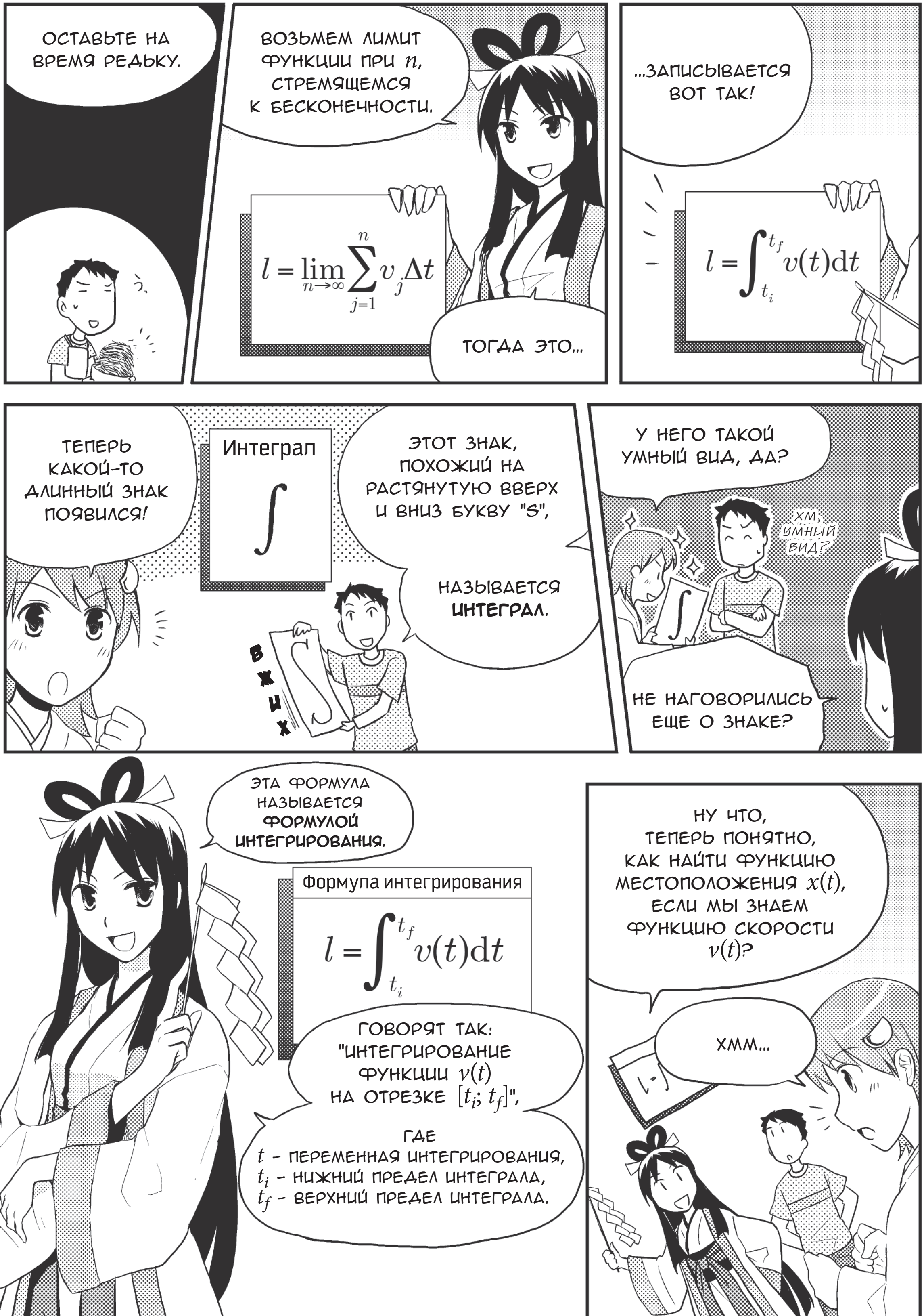
3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ




Посмотрим на графике.
$l = v\Delta t$
графически
График пройденного расстояния в случае фиксированной скорости
Пройденное расстояние равняется площади прямоугольника, ограниченного значениями времени t_i и t_f и функцией $v(t)$
v
l
v
t
t_i
Δt
t_f
Расстояние l будет соответствовать площади вот этого прямоугольника.
Ух ты! Вот оно как!
Если мы сможем обобщить эту ситуацию, то для любой скорости, найдя площадь полученной фигуры,
мы сможем вычислить и пройденное расстояние.
x
t
0
x
t
0
x
t
0
О-о-о!
Хорошо,
рассмотрим другой пример.
Да!
Мне бы тоже надо поднапрячься
Вот это рвение!


ЕСЛИ СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА ПРОПОРЦИОНАЛЬНА ВРЕМЕНИ $v(t) = at$,
КАК МЫ ПОСТУПИМ?
ХММ, ТОГДА...
v
v
l
t_i
Δt
t_f
t
НУЖНО ПЕРЕМНОЖИТЬ КАТЕТЫ И РАЗДЕЛИТЬ НА 2, ТАК?
Площадь треугольника
Тут все понятно
ААА!!!
(злится)
ТАК ЖЕ НЕ ПОЛУЧИТСЯ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ!!
НУЖНО ДЕЙСТВОВАТЬ ТАК ЖЕ, КАК В СЛУЧАЕ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ. ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ Δt – ЭТО КЛЮЧ!
$l = v_1 \Delta t$
$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t$
$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + v_4\Delta t + v_5\Delta t$
$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_n\Delta t$
БУДЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ПЛОЩАДИ, КАК В СЛУЧАЕ С ФИКСИРОВАННОЙ СКОРОСТЬЮ.
ЕСЛИ ВОТ ТАКИМ ОБРАЗОМ РАЗБИТЬ ФИГУРУ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКИ, ТО С УМЕНЬШЕНИЕМ ИХ ШИРИНЫ ПОСТЕПЕННО БУДЕМ ПРИБЛИЖАТЬСЯ К ТОМУ, КОГДА $v(t) = at$.


БЛЕСК
Редька дайкон
ШИХ
ВОТ ТАК ВОТ...
ШИХ
ШИХ
...РЕЖЕМ НА ТОНКИЕ КУСОЧКИ.
ЕСЛИ СЛОЖИТЬ ВСЕ ЭТИ n МАЛЕНЬКИХ КУСОЧКОВ, КОТОРЫЕ У НАС ПОЛУЧИЛИСЬ ПОСЛЕ НАРЕЗКИ, ТО ПОЛУЧИМ ВОТ ТАКУЮ ФОРМУЛУ:
хи-хи
Как у вас здорово получается!
Режем мелко
$l = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_n\Delta t = \sum_{j=1}^{n} v_j\Delta t$
А ЭТО ЧТО ЗА ЗНАК?
Тройка наоборот?
Сигма
$\sum$
ЭТО ГРЕЧЕСКАЯ БУКВА СИГМА.
НАЗЫВАЕТСЯ ПРОСТО "S", ОТ "SUM", И ОЗНАЧАЕТ, ЧТО НУЖНО ПРОСУММИРОВАТЬ.
$\cdots + v_n\Delta t = \sum_{j=1}^{n} v_j\Delta t$
ВЕРНО, ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО МЫ ДОЛЖНЫ ПОСЧИТАТЬ СУММУ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ $v_j\Delta t$ ДЛЯ КАЖДОГО j ОТ 1 ДО n.
А ТЕПЕРЬ...
А ТЕПЕРЬ, ЧТОБЫ МИНИМИЗИРОВАТЬ РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ КУСОЧКАМИ, МЫ УВЕЛИЧИМ ИХ КОЛИЧЕСТВО ДО БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОГО ЧИСЛА!
О-о!
ОЧЕНЬ МЕЛКО
Что теперь делать с этим дайконом?
Можете съесть
Получился салат из редьки!



Оставьте на время редьку.
Возьмем лимит функции при n, стремящемся к бесконечности.
$l = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} v_j \Delta t$
Тогда это...
...записывается вот так!
$l = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t$
Теперь какой-то длинный знак появился!
Интеграл
$\int$
Этот знак, похожий на растянутую вверх и вниз букву "S",
называется **интеграл**.
ВЖИХ
У него такой умный вид, да?
Хм, умный вид?
Не наговорились еще о знаке?
Эта формула называется **формулой интегрирования**.
Формула интегрирования
$l = \int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t$
Говорят так: "интегрирование функции $v(t)$ на отрезке $[t_i; t_f]$",
где
t – переменная интегрирования,
t_i – нижний предел интеграла,
t_f – верхний предел интеграла.
Ну что, теперь понятно, как найти функцию местоположения $x(t)$, если мы знаем функцию скорости $v(t)$?
Хмм...

Местонахождение планера $x(t_f)$ в момент времени t_f равняется сумме координаты местонахождения планера $x(t_i)$ в момент времени t_i и пройденного с момента времени t_i до момента времени t_f расстояния l:

$$x(t_f) = x(t_i) + l.$$

Если же нам известна функция скорости $v(t)$, то пройденное расстояние l можно найти, проинтегрировав функцию $v(t)$:

$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t.$$

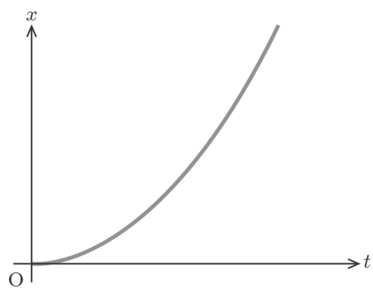
Здесь переменная t_f выражает некоторое определенное значение. Если же мы хотим сделать верхнюю границу интеграла подвижной и изменяемой, то просто заменим t_f на t[4]. Теперь расстояние l станет функцией от времени:

$$l(t) = \int_{t_i}^{t} v(t)\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

И местоположение тоже является функцией от времени $x(t)$:

$$x(t) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t} v(t)\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

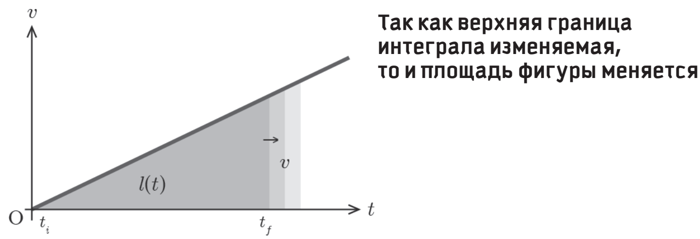
В этом случае, если за начальную позицию мы возьмем нуль: $x(t_i) = 0$, на вертикальной оси будем отмечать местоположение, а на горизонтальной оси – время, то получим следующий график:



Изменение местоположения от времени

Однако когда мы знаем функцию скорости от времени $v(t)$, то пройденное с момента времени t_i до неопределенного момента времени t расстояние является функцией от времени $l(t)$.

[4] Считаем, что момент времени может быть любым.



Интеграл функции пройденного расстояния $l(t)$ с момента времени t_i до произвольного момента времени t

Продифференцируем функцию $l(t)$ по t. Следуя определению производной функции, получим такое уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l(t+\Delta t) - l(t)}{\Delta t}.$$

Теперь заменим $l(t)$ на формулы с интегралами и вот что получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t_i}^{t+\Delta t} v(t)\mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t} v(t)\mathrm{d}t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t_i}^{t+\Delta t} v(t)\mathrm{d}t}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

Этот предел стремится к $v(t)$. Другими словами:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}l(t) = v(t).$$

Однако вернемся к формуле фукции расстояния $l(t)$ (2.3):

$$l(t) = \int_{t_i}^{t} v(t)\mathrm{d}t.$$

Из этого следует, что если мы дифференцируем проинтегрированную функцию, то в результате мы получаем саму функцию!

Вернемся к формуле функции местоположения $x(t)$ (2.4):

$$x(t) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t} v(t)\mathrm{d}t.$$

Вернем на время вместо переменной t, означающей, что ее значение может быть произвольным, переменную t_f. И преобразуем формулу, отняв от обеих частей $x(t_i)$:

$$\int_{t_i}^{t_j} v(t)\mathrm{d}t = x(t_f) - x(t_i).$$

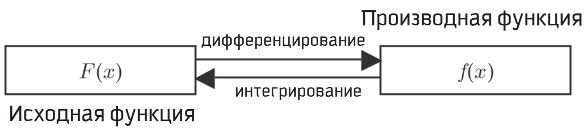
[5] Если тебе кажется, что это само собой понятно, то тут одно из двух: либо ты такой знаток математики, что эту книжку тебе и читать не нужно, либо ты просто хорошо вызубрил формулы, но не понял сути.

Получается, что расстояние, пройденное планером с момента времени t_i до момента времени t_f, можно выразить как местоположение планера в момент времени t_f минус местоположение планера в момент времени t_i. Само собой, не так ли. Но подождите. Пройденное расстояние равно площади фигуры на графике функции $v(t)$. С другой стороны, продифференцировав функцию местоположения, мы нашли значение скорости. И казалось бы, не должно быть ничего общего у площади фигуры на графике и найденного посредством дифференцирования значения скорости. Однако, исходя из формулы, мы видим, что они связаны. И кажется, это очень важная связь.

Попробуем обобщить. Назовем $F(t)$ функцию, которая после дифференцирования становится функцией $f(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=f(t). \tag{2.6}$$

Функция $F(t)$ называется первообразной для функции $f(t)$. Отношения между этими функциями такие: если мы продифференцируем функцию $F(t)$, то получим производную функцию $f(t)$, если мы проинтегрируем функцию $f(t)$, то получим исходную функцию $F(t)$. Подобно умножению и делению, дифференцирование и интегрирование являются взаимно-обратными операциями.



Дифференцируя функцию $F(t)$,
получаем производную функцию $f(t)$;
интегрируя функцию $f(t)$, получаем исходную функцию $F(t)$

Дифференцирование и интегрирование – взаимно-обратные операции

Вернемся к выявленной нами взаимосвязи между скоростью и местоположением:

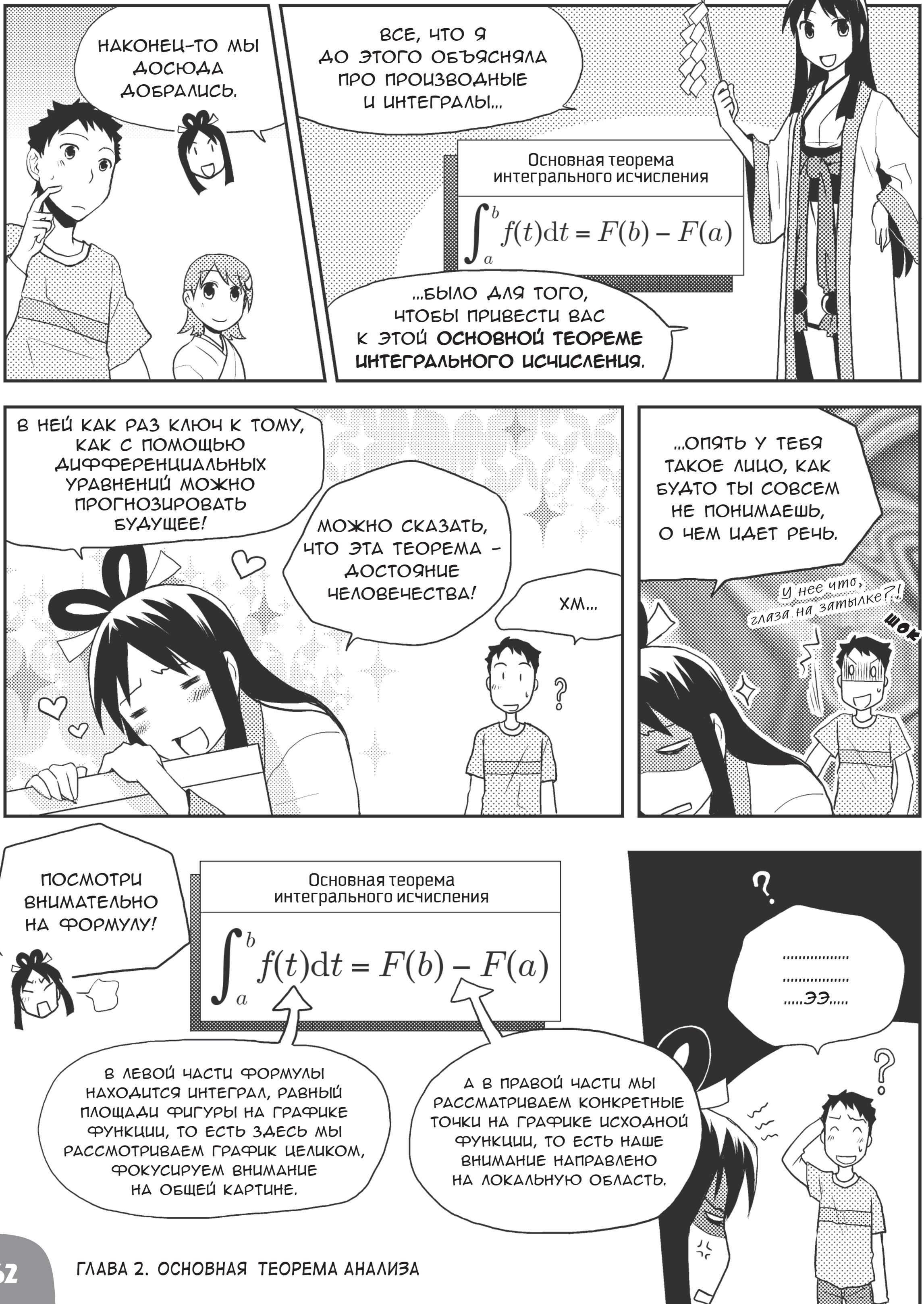
$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t = x(t_f)-x(t_i).$$

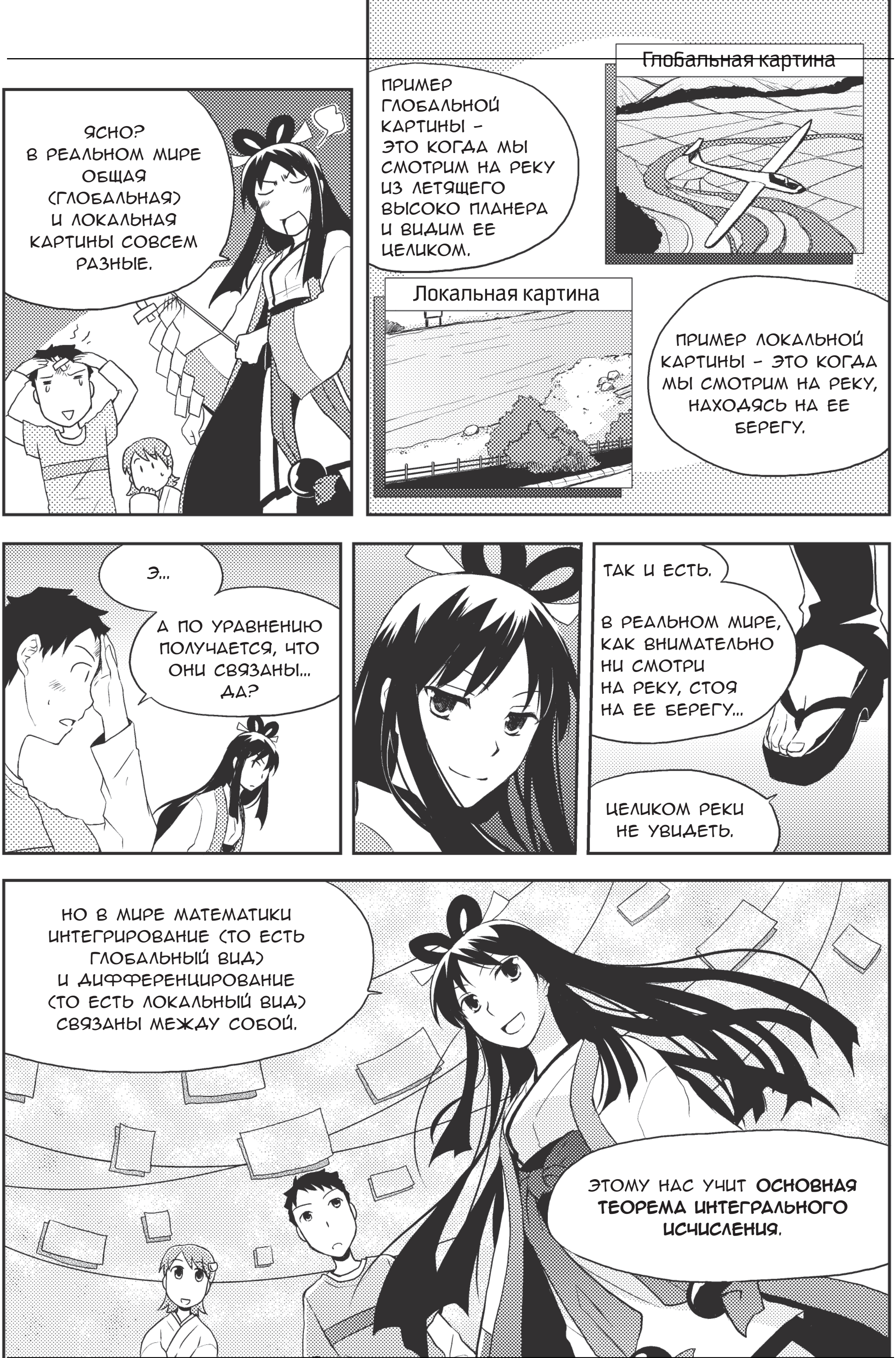
Заменим $v(t)$ на $f(t)$, а $x(t)$ на исходную для $f(t)$ функцию $F(t)$, t_i на a, а t_f на b, тогда получим:

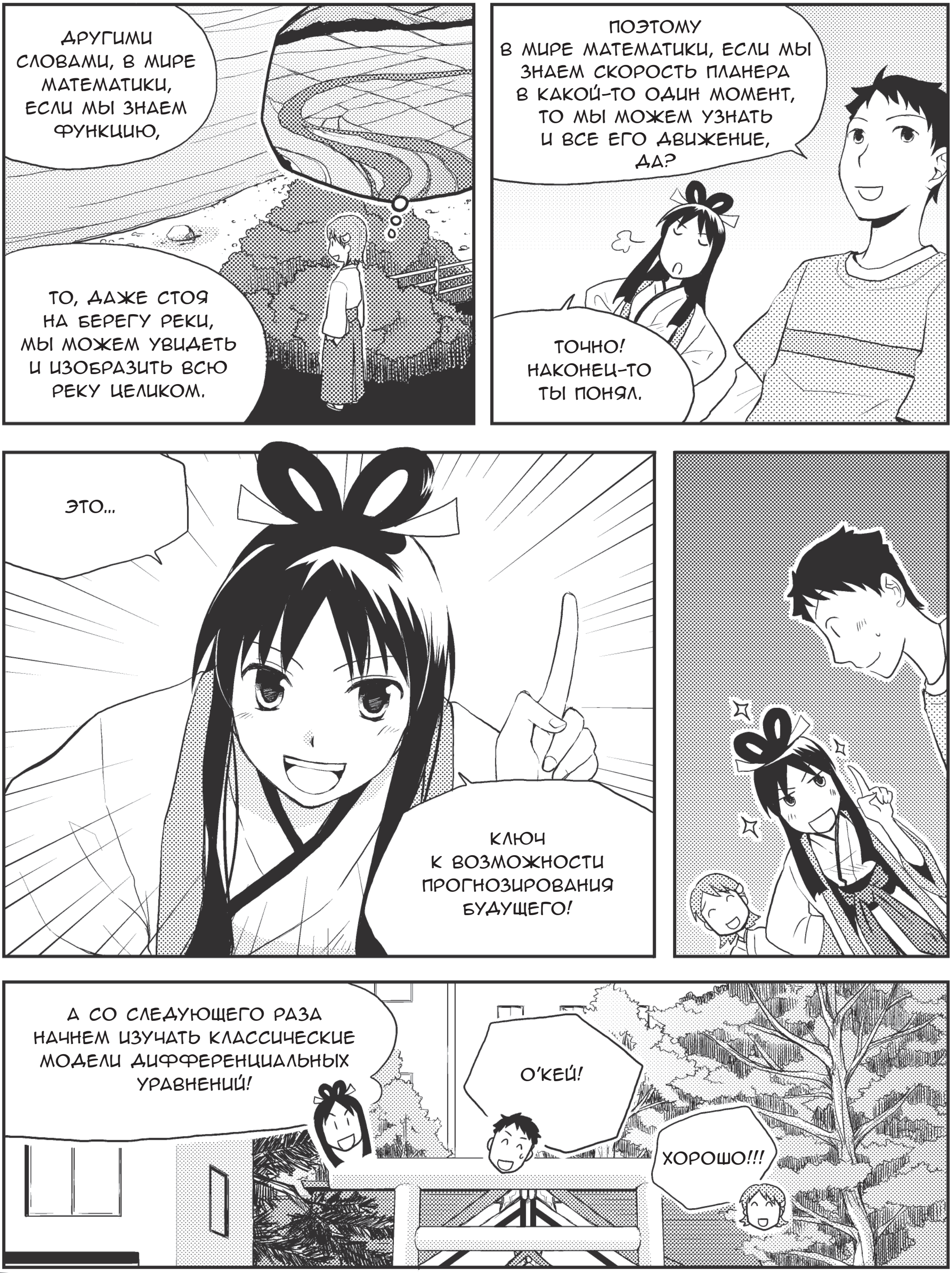
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a).$$

Это – основная теорема интегрального исчисления.

Она показывает, что найти площадь фигуры, образованной функцией на графике (левая часть формулы), можно посредством операции, обратной дифференцированию (правая часть формулы).


НАКОНЕЦ-ТО МЫ ДОСЮДА ДОБРАЛИСЬ.
ВСЕ, ЧТО Я ДО ЭТОГО ОБЪЯСНЯЛА ПРО ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ...
Основная теорема интегрального исчисления
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
...БЫЛО ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ПРИВЕСТИ ВАС К ЭТОЙ **ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**.
В НЕЙ КАК РАЗ КЛЮЧ К ТОМУ, КАК С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОЖНО ПРОГНОЗИРОВАТЬ БУДУЩЕЕ!
МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО ЭТА ТЕОРЕМА – ДОСТОЯНИЕ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА!
ХМ...
...ОПЯТЬ У ТЕБЯ ТАКОЕ ЛИЦО, КАК БУДТО ТЫ СОВСЕМ НЕ ПОНИМАЕШЬ, О ЧЕМ ИДЕТ РЕЧЬ.
У нее что, глаза на затылке?!
ШОК
ПОСМОТРИ ВНИМАТЕЛЬНО НА ФОРМУЛУ!
Основная теорема интегрального исчисления
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
В ЛЕВОЙ ЧАСТИ ФОРМУЛЫ НАХОДИТСЯ ИНТЕГРАЛ, РАВНЫЙ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ НА ГРАФИКЕ ФУНКЦИИ, ТО ЕСТЬ ЗДЕСЬ МЫ РАССМОТРИВАЕМ ГРАФИК ЦЕЛИКОМ, ФОКУСИРУЕМ ВНИМАНИЕ НА ОБЩЕЙ КАРТИНЕ.
А В ПРАВОЙ ЧАСТИ МЫ РАССМАТРИВАЕМ КОНКРЕТНЫЕ ТОЧКИ НА ГРАФИКЕ ИСХОДНОЙ ФУНКЦИИ, ТО ЕСТЬ НАШЕ ВНИМАНИЕ НАПРАВЛЕНО НА ЛОКАЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ.
....
....
.....ЭЭ.....


ЯСНО? В РЕАЛЬНОМ МИРЕ ОБЩАЯ (ГЛОБАЛЬНАЯ) И ЛОКАЛЬНАЯ КАРТИНЫ СОВСЕМ РАЗНЫЕ.
ПРИМЕР ГЛОБАЛЬНОЙ КАРТИНЫ – ЭТО КОГДА МЫ СМОТРИМ НА РЕКУ ИЗ ЛЕТЯЩЕГО ВЫСОКО ПЛАНЕРА И ВИДИМ ЕЕ ЦЕЛИКОМ.
Глобальная картина
Локальная картина
ПРИМЕР ЛОКАЛЬНОЙ КАРТИНЫ – ЭТО КОГДА МЫ СМОТРИМ НА РЕКУ, НАХОДЯСЬ НА ЕЕ БЕРЕГУ.
Э...
А ПО УРАВНЕНИЮ ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО ОНИ СВЯЗАНЫ... ДА?
ТАК И ЕСТЬ.
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ, КАК ВНИМАТЕЛЬНО НИ СМОТРИ НА РЕКУ, СТОЯ НА ЕЕ БЕРЕГУ...
ЦЕЛИКОМ РЕКИ НЕ УВИДЕТЬ.
НО В МИРЕ МАТЕМАТИКИ ИНТЕГРИРОВАНИЕ (ТО ЕСТЬ ГЛОБАЛЬНЫЙ ВИД) И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ (ТО ЕСТЬ ЛОКАЛЬНЫЙ ВИД) СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ.
ЭТОМУ НАС УЧИТ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.


ДРУГИМИ СЛОВАМИ, В МИРЕ МАТЕМАТИКИ, ЕСЛИ МЫ ЗНАЕМ ФУНКЦИЮ,
ТО, ДАЖЕ СТОЯ НА БЕРЕГУ РЕКИ, МЫ МОЖЕМ УВИДЕТЬ И ИЗОБРАЗИТЬ ВСЮ РЕКУ ЦЕЛИКОМ.
ПОЭТОМУ В МИРЕ МАТЕМАТИКИ, ЕСЛИ МЫ ЗНАЕМ СКОРОСТЬ ПЛАНЕРА В КАКОЙ-ТО ОДИН МОМЕНТ, ТО МЫ МОЖЕМ УЗНАТЬ И ВСЕ ЕГО ДВИЖЕНИЕ, ДА?
ТОЧНО! НАКОНЕЦ-ТО ТЫ ПОНЯЛ.
ЭТО...
КЛЮЧ К ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БУДУЩЕГО!
А СО СЛЕДУЮЩЕГО РАЗА НАЧНЕМ ИЗУЧАТЬ КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ!
О'КЕЙ!
ХОРОШО!!!

Итак, исходя из основной теоремы интегрального исчисления, площадь фигуры, образованной функцией на графике, равна разнице между значениями исходной функции в точке верхнего предела интеграла и в точке нижнего предела интеграла. Если записать $F(b) - F(a)$ как:

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a),$$

то получим:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b.$$

То есть, другими словами, если мы знаем исходную функцию, то нам не нужно вычислять предел площади фигуры на графике, достаточно подставить значения в исходную фукцию и произвести вычитание[6]. Это очень удобно.

Полностью исходная функция для функции $f(t)$ выглядит вот так:

$$\int f(t)\mathrm{d}t.$$

Это называется **неопределенный интеграл**. И наоборот, интеграл, определяющий площадь фигуры на графике функции:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

называется **определенным интегралом**. Основная теорема интегрального исчисления говорит и о том, что не имеющие связи на первый взгляд неопределенный и определенный интегралы, на самом деле связаны[7].

Итак, если $F(t)$ – это исходная функция для $f(t)$, а C – это постоянная, которая может принимать любые значения, то исходя из свойств производной:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(t)+C) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)+0 = f(t),$$

а значит, и функция $F(t) + C$ будет являться исходной функцией для $f(t)$. Другими словами, неопределенный интеграл будет выглядеть так:

$$\int f(t)\mathrm{d}t = F(t)+C.$$

Значение C мы не можем выбирать. C называется **произвольной постоянной**, так как она может принимать любое значение. И именно благодаря ее наличию интеграл называется **неопределенным**. Если изобразить исходные функции для такого интеграла графически, это будет множество параллельных друг другу графиков.

---

[6] Вычислять интеграл с помощью предела на практике довольно сложно.

[7] Речь не о форме уравнения, а о смысле. Люди, знающие основную теорему интегрального исчисления, иногда так думают.

Так как интегрирование и дифференцирование являются взаимно-обратными операциями, мы можем найти неопределенные интегралы через исходные функции для подынтегральных функций.

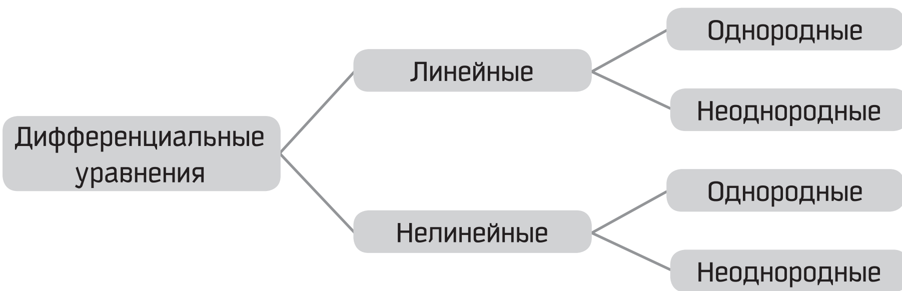
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^n = nt^{n-1} \;\rightarrow\; \int t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{t^n}{n} + C \;\; (n \neq 0);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t \;\rightarrow\; \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t \;\rightarrow\; \int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + C;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t = e^t \;\rightarrow\; \int e^t\mathrm{d}t = e^t + C.$$

Подробно то, как решать дифференциальные уравнения, мы рассмотрим в следующих главах. Эту же главу закончим тем, что выделим основные виды дифференциальных уравнений. Мы уже говорили о том, что дифференциальным уравнением называется любое уравнение, содержащее производную. Их очень много, и чтобы не запутаться, нужно их классифицировать. Для классификации используются следующие показатели: количество переменных, порядок, степень, линейность и нелинейность, однородность и неоднородность, постоянство и непостоянство коэффициентов и т. д.



Классификация дифференциальных уравнений

Для начала рассмотрим фактор количества переменных. Если независимая переменная одна, то такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**. Если же независимых переменных несколько, то они называются **дифференциальными уравнениями в частных производных**. В этой книге мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения. Все дифференциальные уравнения, которые нам уже встречались в этой книге, тоже являются обыкновенными. Так как здесь мы опускаем дифференциальные уравнения в частных производных, то, пожалуйста, имейте в виду, что когда в этой книге мы говорим о дифференциальных уравнениях, то подразумеваем обыкновенные дифференциальные уравнения.

Далее рассмотрим порядок и степень.

Самый большой порядок производной функции, содержащейся в дифференциальном уравнении, называется порядком дифференциального уравнения. А степень производной функции в уравнении называется степенью самого дифференциального уравнения. Например,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = ka \qquad \leftarrow \text{Уравнение 1-го порядка 1-й степени}$$

содержит производную 1-го порядка и находится в 1-й степени, поэтому называется дифференциальным уравнением 1-го порядка 1-й степени.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0. \qquad \leftarrow \text{Уравнение 2-го порядка 1-й степени}$$

Здесь содержатся две производные функции: одна 1-го порядка, другая – 2-го порядка. Следуя правилу, что порядком всего уравнения называется наибольший порядок производной, это дифференциальное уравнение является уравнением 2-го порядка 1-й степени.

Теперь рассмотрим линейность и нелинейность. Линейными называются дифференциальные уравнения, в которых переменные и производные функций находятся в первой степени. В противном случае это будет нелинейное дифференциальное уравнение. Еще раз на тех же примерах:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = ka; \qquad \leftarrow \text{Линейное дифференциальное уравнение}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0. \qquad \leftarrow \text{Линейное дифференциальное уравнение}$$

Мы видим, что в обоих уравнениях степени переменных и производных функций – первые. Значит, оба уравнения являются линейными.

Далее, уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Если все коэффициенты в линейном уравнение – постоянные, то оно называется дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Если же среди коэффициентов есть переменные, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Например:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами}$$

– тут коэффициенты переменные,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 7x = 0 \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами}$$

– а здесь коэффициенты постоянные.

И в конце рассмотрим однородные и неоднородные уравнения. Однородными называются такие линейные дифференциальные уравнения, которые не содержат свободного члена. В противном случае уравнения будут неоднородными. Например:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = ka \qquad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение}$$

– это уравнение неоднородное;

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \qquad \leftarrow \text{Однородное дифференциальное уравнение}$$

– а это однородное.

Подытожим классификацию уравнений. Например, уравнение вида:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

← Обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка 1-й степени с переменными коэффициентами

будет называться обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка 1-й степени с переменными коэффициентами. Длинновато, не так ли. На самом деле чаще всего названия уравнений сокращают в соответствии с ситуацией. Обратите на это внимание, когда будете детальнее работать с дифференциальными уравнениями.

В главе 3 мы рассмотрим метод разделения переменных для однородных уравнений 1-го порядка, в главе 4 рассмотрим неоднородные линейные уравнения 1-го порядка, а в главе 5 – линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Примеры дифференциальных уравнений, используемые в этой книге

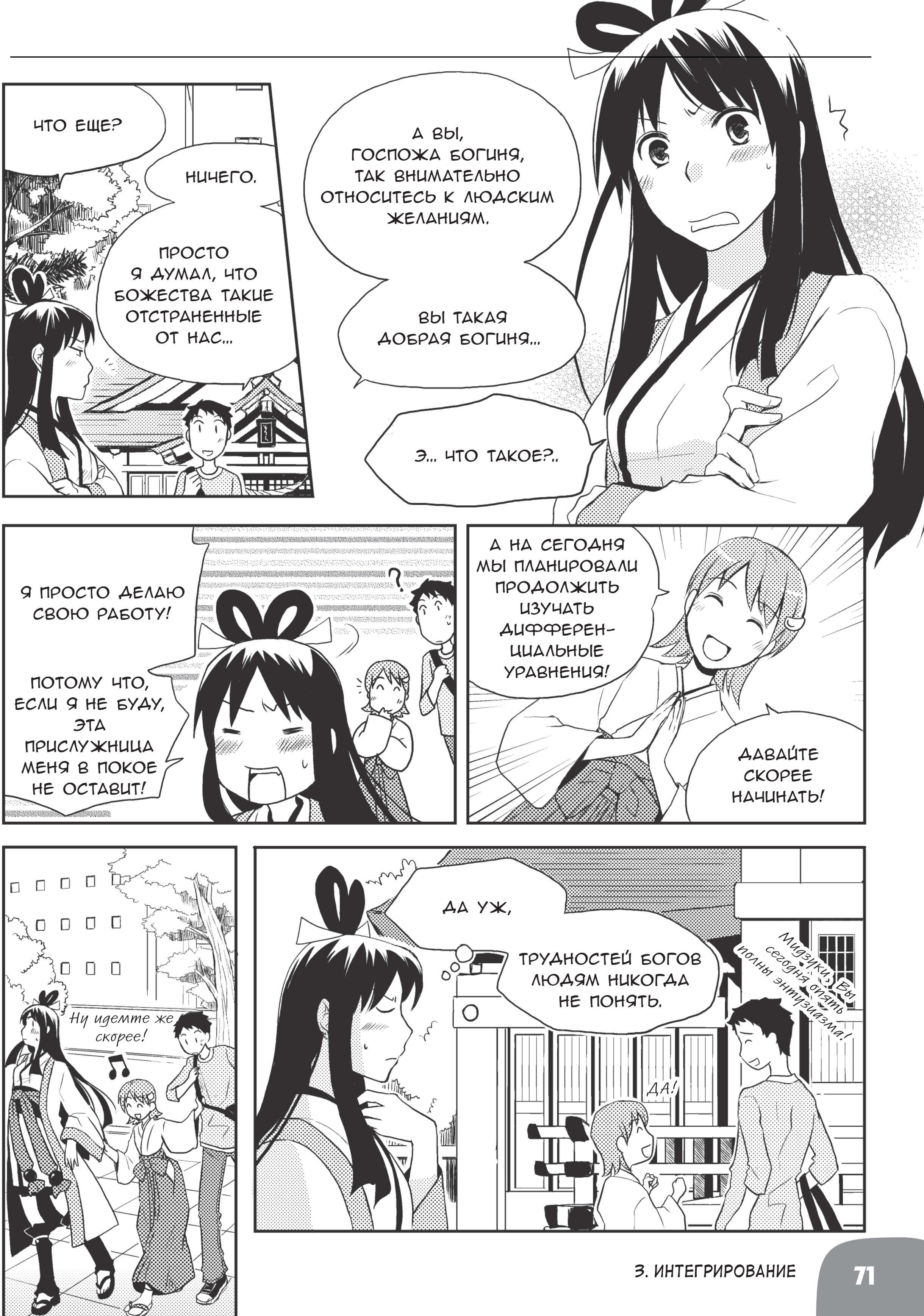
Порядок	Вид	Уравнение	Пояснение	Глава
1-й	Однородные линейные	$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$	Дифференциальное уравнение, описывающее изменение численности оленей эдзо	3
	Неоднородные линейные	$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 6\pi\eta r v$	Уравнение движения с учетом силы тяжести и силы вязкого трения	4
2-й	Однородные линейные	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$	Уравнение движения осциллятора с учетом упругости и сопротивления	5
	Неоднородные линейные	$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0 \cos \nu t$	Уравнение движения осциллятора с учетом упругости и сопротивления и воздействия внешних сил	5

ГЛАВА 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

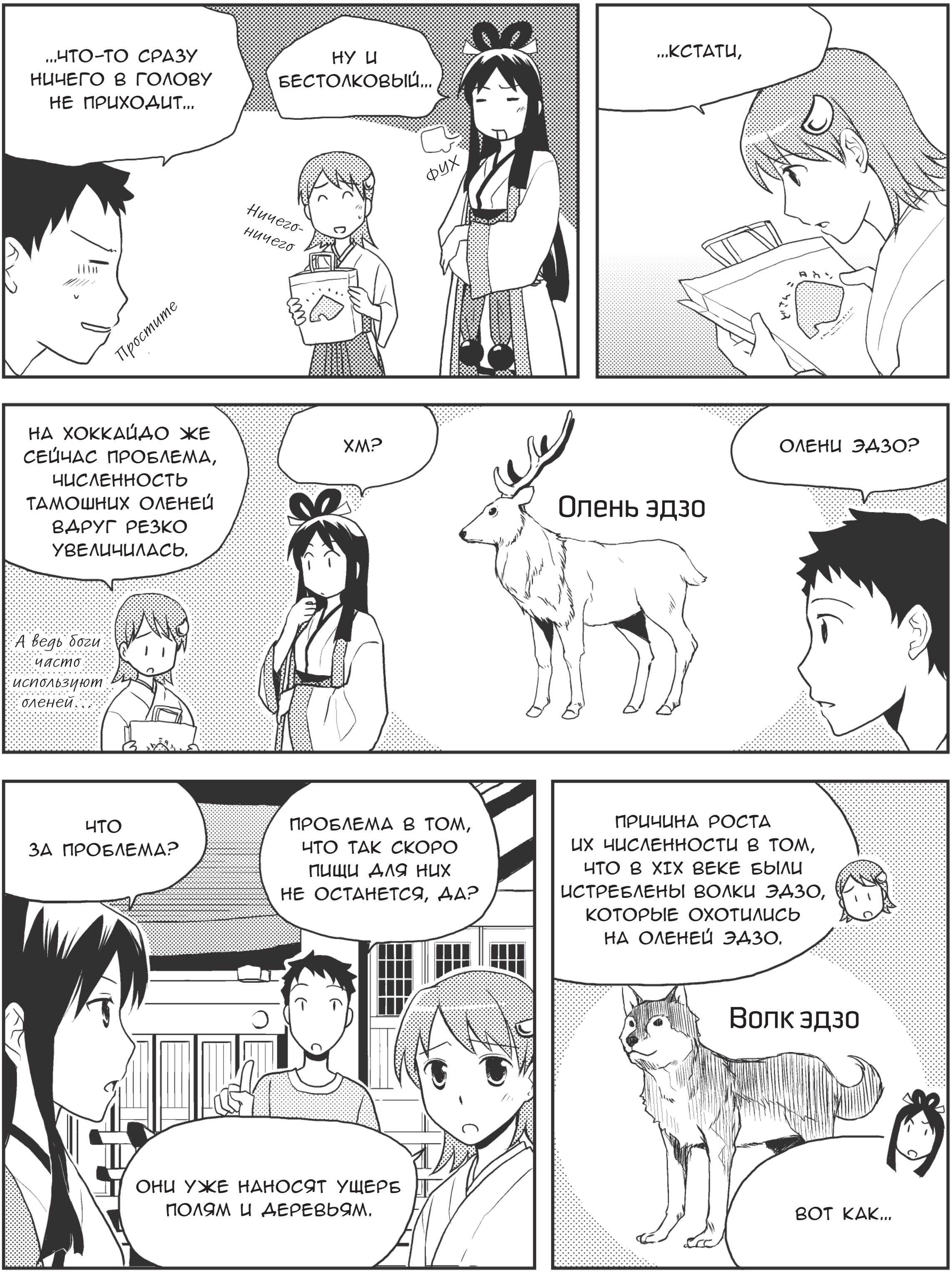
СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЦАРСТВО ОЛЕНЕЙ ЭДЗО?

Пожалуйста, пусть в моем магазине дела идут хорошо!
Он же уже приходил раньше...
О! Отличная идея!
Так найми себе хорошенькую продавщицу или еще что-нибудь в этом роде.
Госпожа богиня!
Опять вы за свое! Говорите, что первое в голову придет!
Странная богиня...
Говорю же, это не моя специализация!
Это еще что! Ну, сейчас получишь!
Странная?
Вжих-вжих-вжих-вжих
А-а-а-а-а-а-а! Простите....!!
Если я могу, я стараюсь выполнить желания всех.
Но я же не всесильная!
А выслушивать все подряд глупости я не обязана!
Не ее специализация...
Но?..

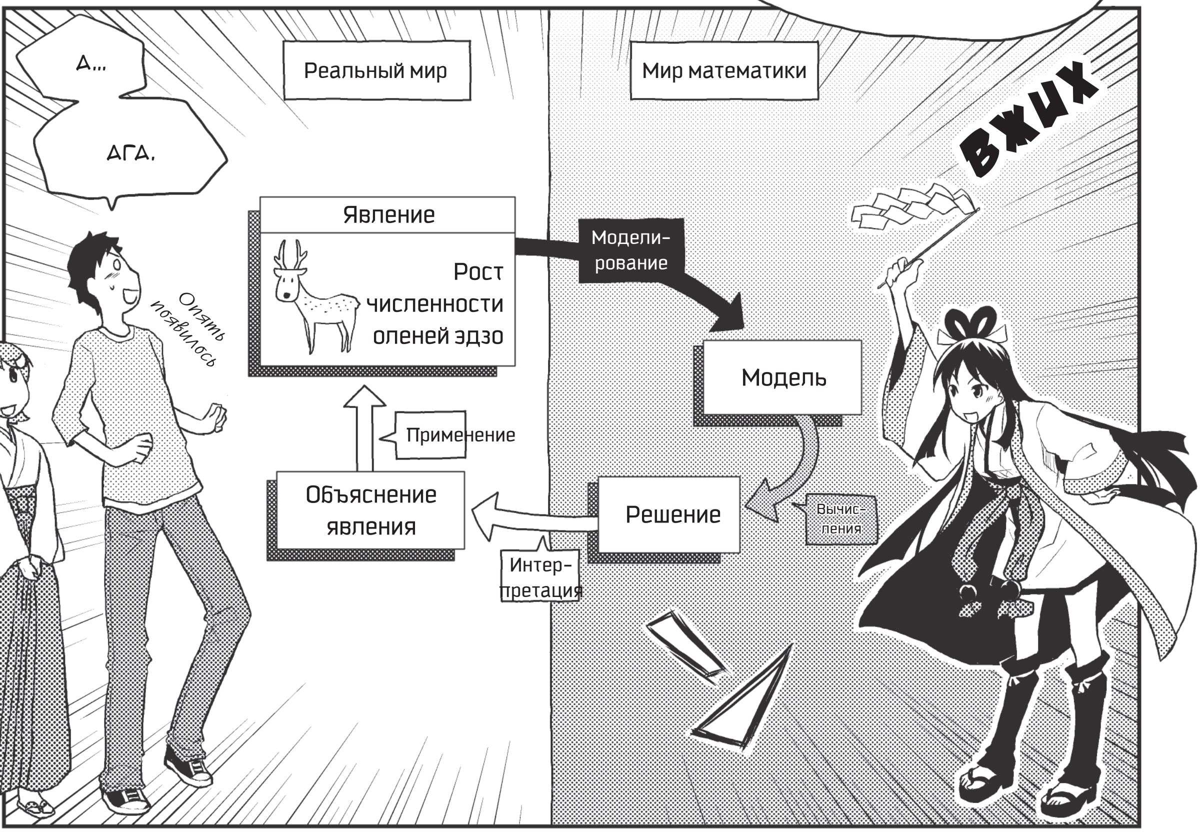


ЧТО ЕЩЕ?
НИЧЕГО.
ПРОСТО Я ДУМАЛ, ЧТО БОЖЕСТВА ТАКИЕ ОТСТРАНЕННЫЕ ОТ НАС...
А ВЫ, ГОСПОЖА БОГИНЯ, ТАК ВНИМАТЕЛЬНО ОТНОСИТЕСЬ К ЛЮДСКИМ ЖЕЛАНИЯМ.
ВЫ ТАКАЯ ДОБРАЯ БОГИНЯ...
Э... ЧТО ТАКОЕ?..
Я ПРОСТО ДЕЛАЮ СВОЮ РАБОТУ!
ПОТОМУ ЧТО, ЕСЛИ Я НЕ БУДУ, ЭТА ПРИСЛУЖНИЦА МЕНЯ В ПОКОЕ НЕ ОСТАВИТ!
?
А НА СЕГОДНЯ МЫ ПЛАНИРОВАЛИ ПРОДОЛЖИТЬ ИЗУЧАТЬ ДИФФЕРЕН-ЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ!
ДАВАЙТЕ СКОРЕЕ НАЧИНАТЬ!
Ну идемте же скорее!
ДА УЖ,
ТРУДНОСТЕЙ БОГОВ ЛЮДЯМ НИКОГДА НЕ ПОНЯТЬ.
Мидзуки, Вы сегодня опять полны энтузиазма!
ДА!


Картошка фри
1. ЯВЛЕНИЕ
фри
Сегодня я буду объяснять явления, которые то постоянно увеличиваются (возрастают), то постоянно уменьшаются (убывают).
Картошка фри
Попробуем использовать **метод разделения переменных**.
...однако...
Эта картошечка вкуснющая!
ХРУМ-ХРУМ
И соли, и перца в самый раз!!
Я купил ее у станции, там открылся магазинчик товаров с Хоккайдо.
Говорят, там мороженое исключительно вкусное.
ХОЧУ-ХОЧУ!
Но сначала учение!
Да, да... знаю..
..."То постоянно возрастают, то постоянно убывают"...
Ага.
Таких явлений много, да?
Хмм...

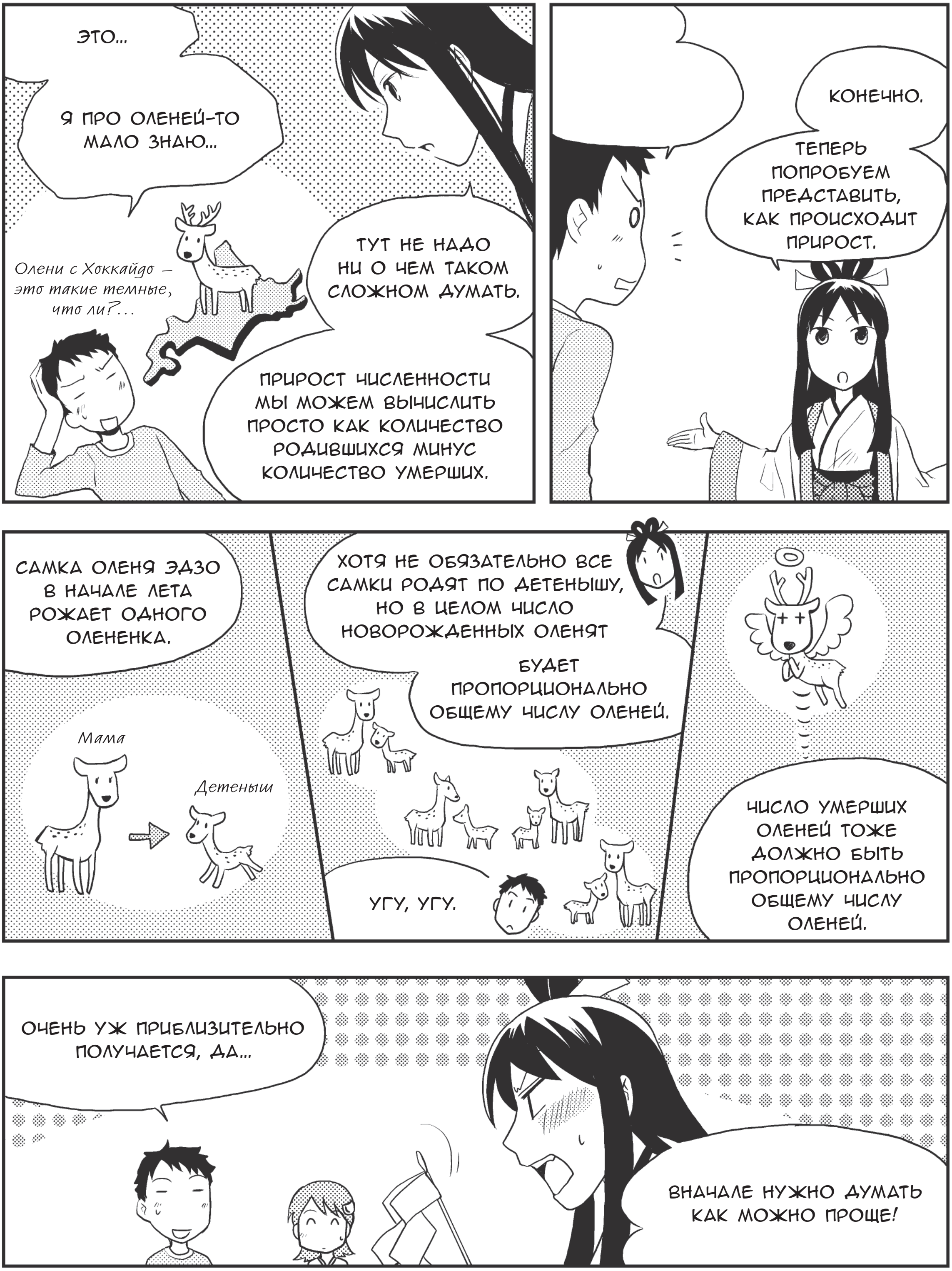

...ЧТО-ТО СРАЗУ НИЧЕГО В ГОЛОВУ НЕ ПРИХОДИТ...
НУ И БЕСТОЛКОВЫЙ...
ФУХ
Ничего-ничего
Простите
...КСТАТИ,
НА ХОККАЙДО ЖЕ СЕЙЧАС ПРОБЛЕМА, ЧИСЛЕННОСТЬ ТАМОШНИХ ОЛЕНЕЙ ВДРУГ РЕЗКО УВЕЛИЧИЛАСЬ.
А ведь боги часто используют оленей...
ХМ?
Олень эдзо
ОЛЕНИ ЭДЗО?
ЧТО ЗА ПРОБЛЕМА?
ПРОБЛЕМА В ТОМ, ЧТО ТАК СКОРО ПИЩИ ДЛЯ НИХ НЕ ОСТАНЕТСЯ, ДА?
ОНИ УЖЕ НАНОСЯТ УЩЕРБ ПОЛЯМ И ДЕРЕВЬЯМ.
ПРИЧИНА РОСТА ИХ ЧИСЛЕННОСТИ В ТОМ, ЧТО В XIX ВЕКЕ БЫЛИ ИСТРЕБЛЕНЫ ВОЛКИ ЭДЗО, КОТОРЫЕ ОХОТИЛИСЬ НА ОЛЕНЕЙ ЭДЗО.
Волк эдзо
ВОТ КАК...

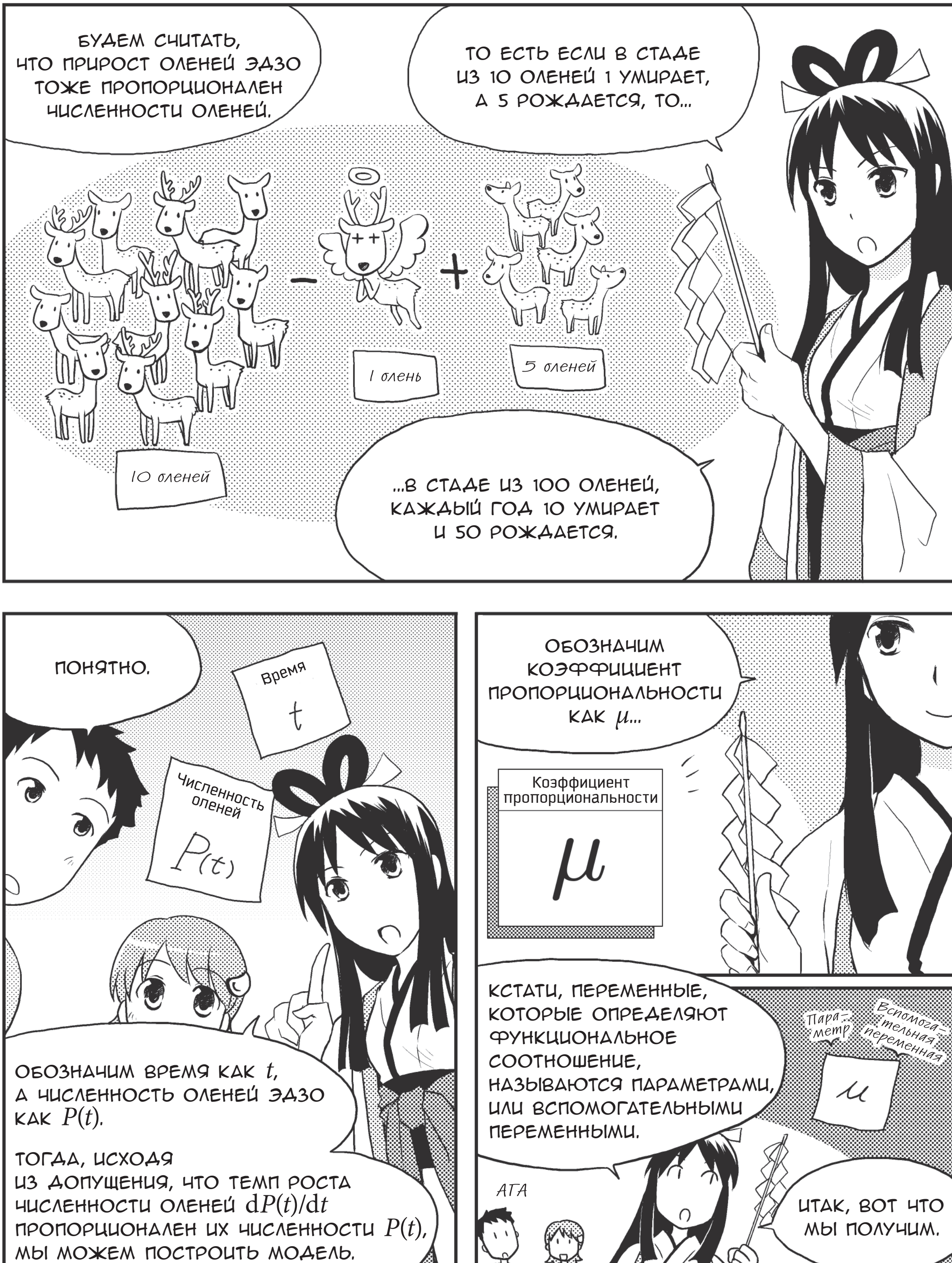

Раз так,
то сегодня мы рассмотрим модель, объясняющую явление роста численности оленей эдзо.

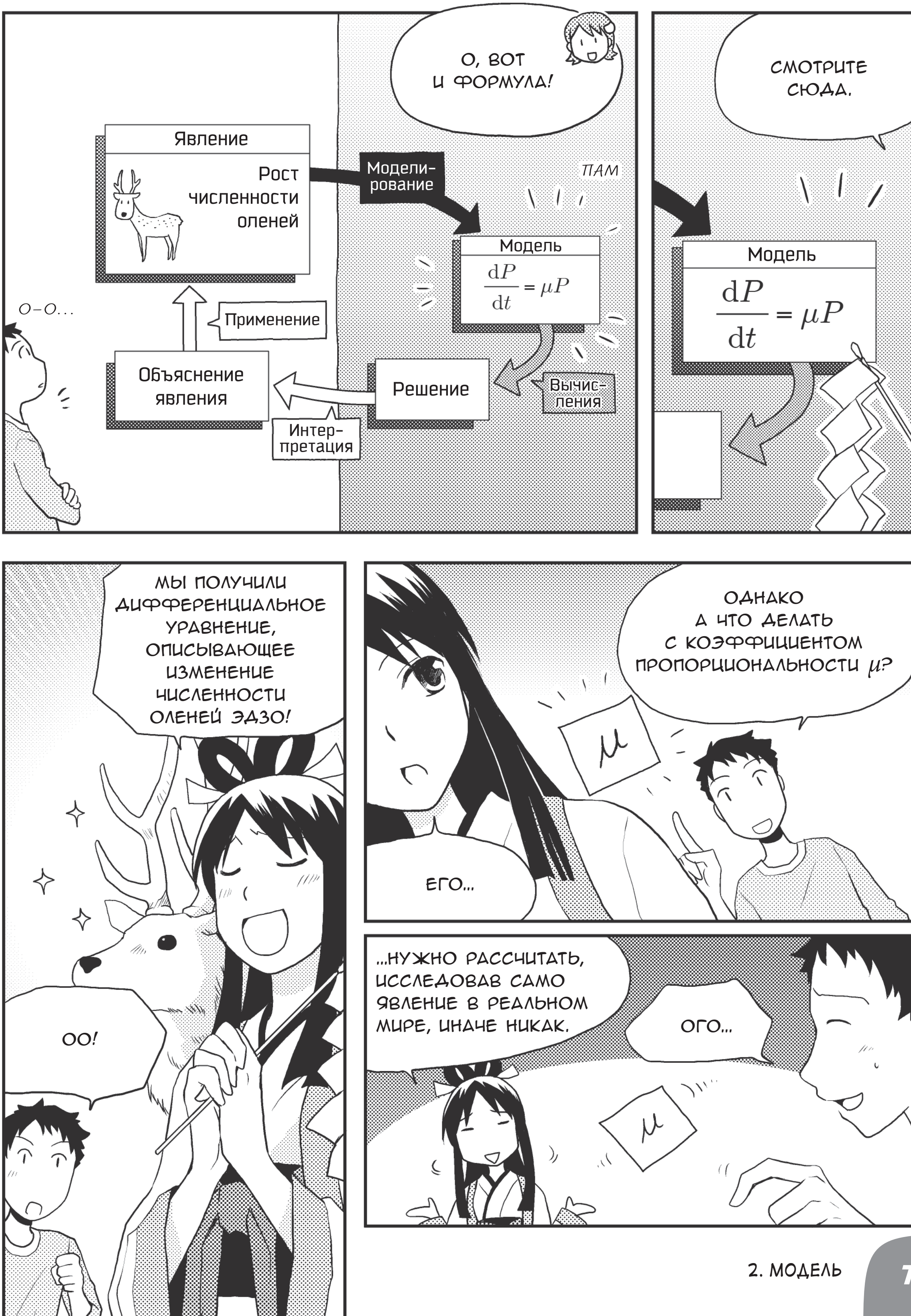

А...
Ага.
Реальный мир
Мир математики
ВЖИХ
Явление
Рост численности оленей эдзо
Опять появилось
Моделирование
Модель
Вычисления
Решение
Интерпретация
Объяснение явления
Применение

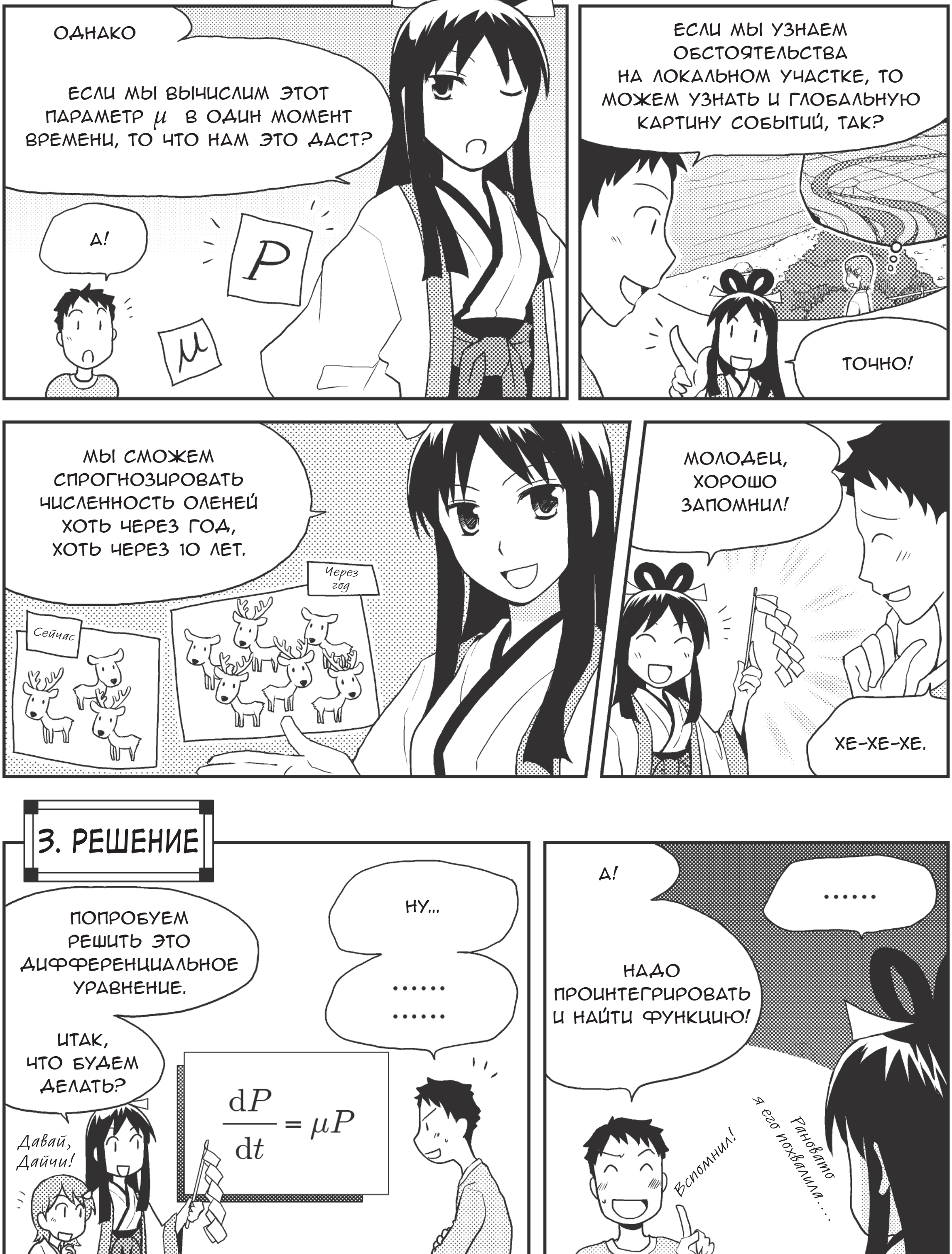
2. МОДЕЛЬ

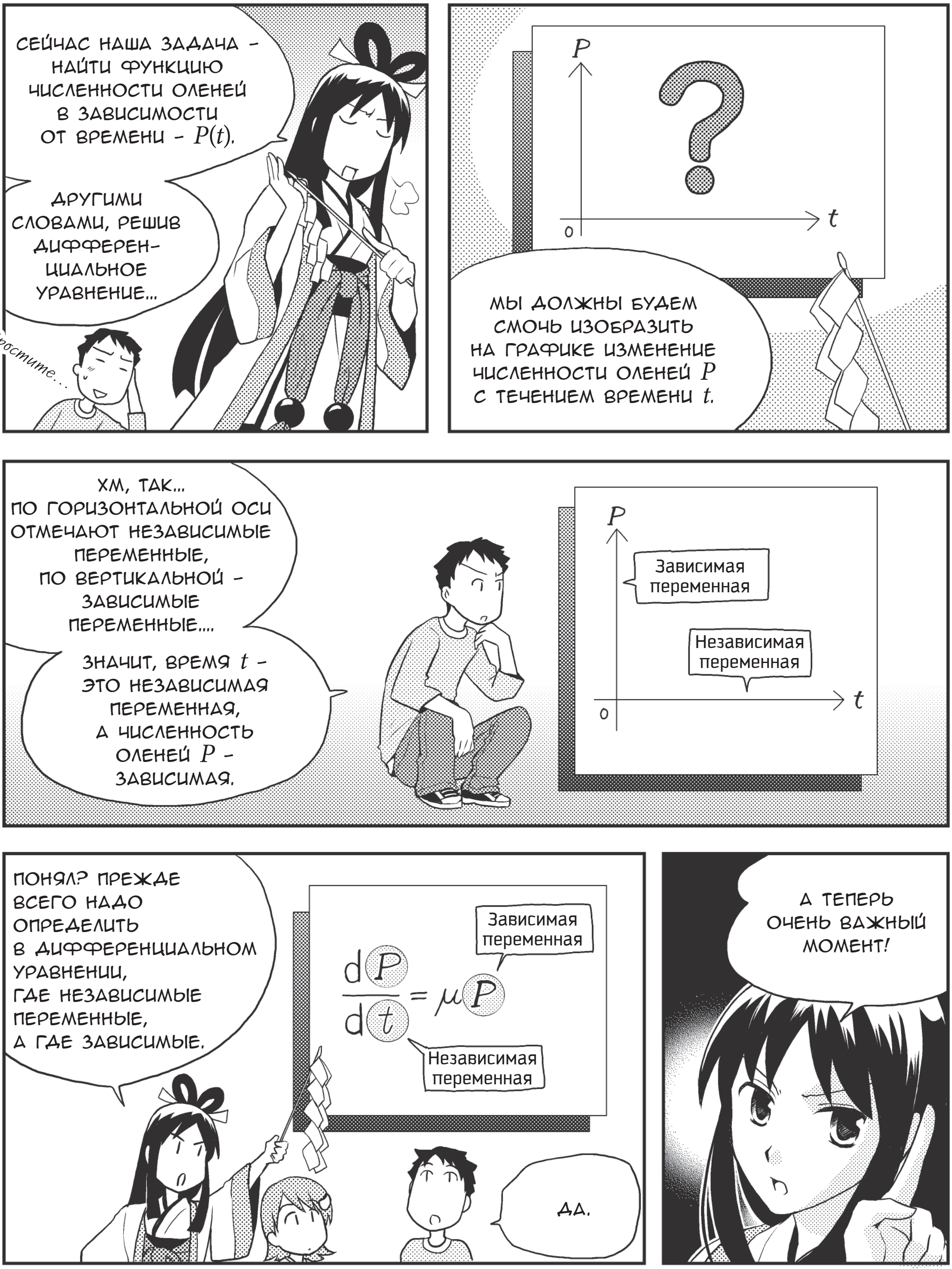

Явление
Рост численности оленей эдзо
Моделирование
Хм...
Ничего не соображаю...
Сначала моделирование.
Как думаешь, какая модель подойдет?

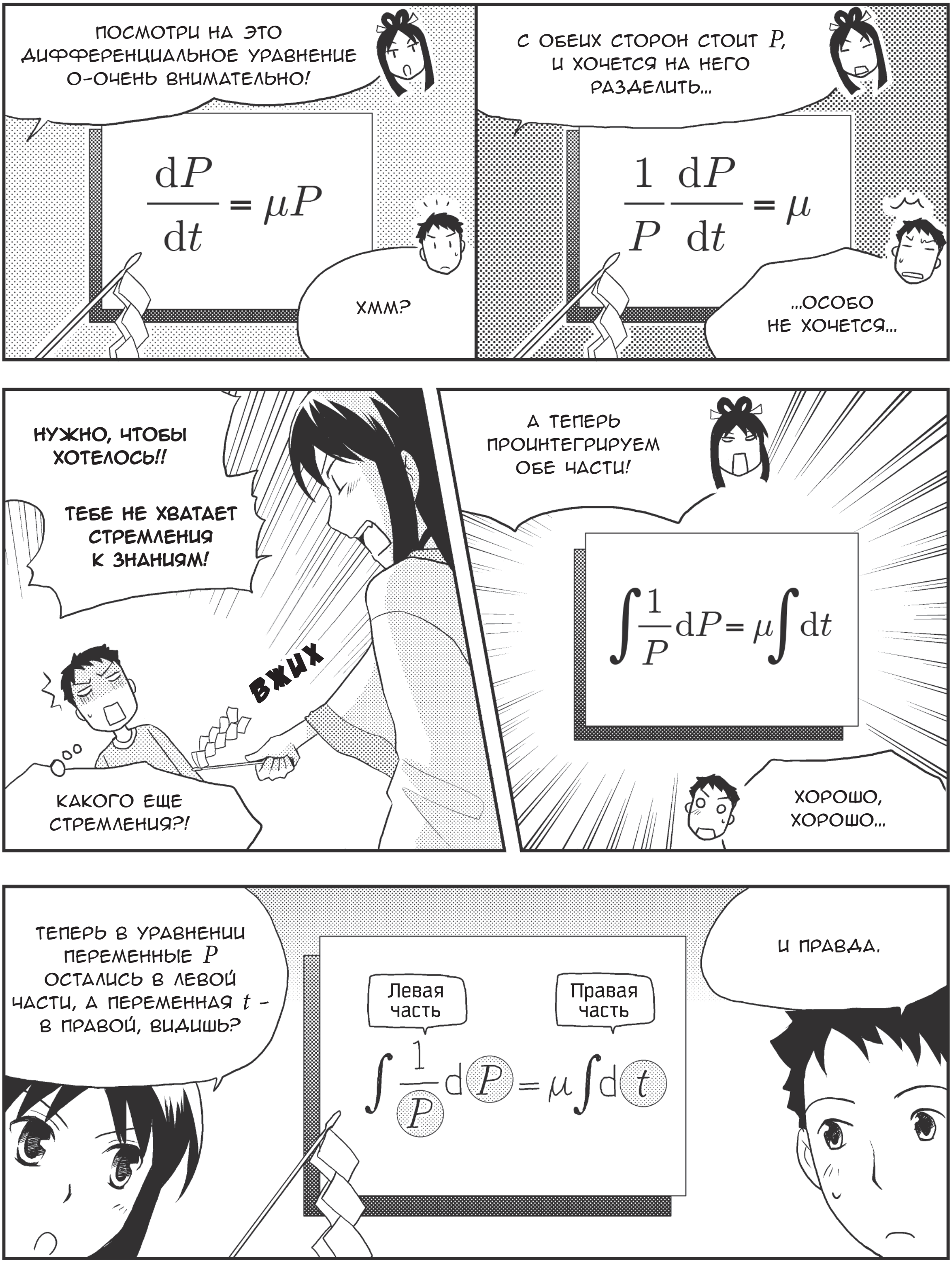

Это...
Я про оленей-то мало знаю...
Олени с Хоккайдо – это такие темные, что ли?...
Тут не надо ни о чем таком сложном думать.
Прирост численности мы можем вычислить просто как количество родившихся минус количество умерших.
Конечно.
Теперь попробуем представить, как происходит прирост.
Самка оленя эдзо в начале лета рожает одного олененка.
Мама
Детеныш
Хотя не обязательно все самки родят по детенышу, но в целом число новорожденных оленят
будет пропорционально общему числу оленей.
Угу, угу.
Число умерших оленей тоже должно быть пропорционально общему числу оленей.
Очень уж приблизительно получается, да...
Вначале нужно думать как можно проще!


Будем считать, что прирост оленей эдзо тоже пропорционален численности оленей.
То есть если в стаде из 10 оленей 1 умирает, а 5 рождается, то...
10 оленей
1 олень
5 оленей
...в стаде из 100 оленей, каждый год 10 умирает и 50 рождается.
Понятно.
Время
t
Численность оленей
$P(t)$
Обозначим время как t, а численность оленей эдзо как $P(t)$.
Тогда, исходя из допущения, что темп роста численности оленей $\mathrm{d}P(t)/\mathrm{d}t$ пропорционален их численности $P(t)$, мы можем построить модель.
Обозначим коэффициент пропорциональности как μ...
Коэффициент пропорциональности
μ
Кстати, переменные, которые определяют функциональное соотношение, называются параметрами, или вспомогательными переменными.
Пара-метр
Вспомога-тельная переменная
μ
Ага
Итак, вот что мы получим.


О-О...
О, ВОТ И ФОРМУЛА!
Явление
Рост численности оленей
Моделирование
ПАМ
Модель
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$
Применение
Объяснение явления
Решение
Вычисления
Интерпретация
СМОТРИТЕ СЮДА.
Модель
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$
МЫ ПОЛУЧИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ОЛЕНЕЙ ЭДЗО!
ОО!
ОДНАКО А ЧТО ДЕЛАТЬ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ μ?
μ
ЕГО...
...НУЖНО РАССЧИТАТЬ, ИССЛЕДОВАВ САМО ЯВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ, ИНАЧЕ НИКАК.
ОГО...
μ


ОДНАКО
ЕСЛИ МЫ ВЫЧИСЛИМ ЭТОТ ПАРАМЕТР μ В ОДИН МОМЕНТ ВРЕМЕНИ, ТО ЧТО НАМ ЭТО ДАСТ?
А!
P
μ
ЕСЛИ МЫ УЗНАЕМ ОБСТОЯТЕЛЬСТВА НА ЛОКАЛЬНОМ УЧАСТКЕ, ТО МОЖЕМ УЗНАТЬ И ГЛОБАЛЬНУЮ КАРТИНУ СОБЫТИЙ, ТАК?
ТОЧНО!
МЫ СМОЖЕМ СПРОГНОЗИРОВАТЬ ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ ХОТЬ ЧЕРЕЗ ГОД, ХОТЬ ЧЕРЕЗ 10 ЛЕТ.
Сейчас
Через год
МОЛОДЕЦ, ХОРОШО ЗАПОМНИЛ!
ХЕ-ХЕ-ХЕ.
3. РЕШЕНИЕ
ПОПРОБУЕМ РЕШИТЬ ЭТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ.
ИТАК, ЧТО БУДЕМ ДЕЛАТЬ?
Давай, Дайчи!
НУ...
....
$\frac{dP}{dt} = \mu P$
А!
......
НАДО ПРОИНТЕГРИРОВАТЬ И НАЙТИ ФУНКЦИЮ!
Вспомнил!
Рановато я его похвалила...


Сейчас наша задача – найти функцию численности оленей в зависимости от времени – $P(t)$.
Другими словами, решив дифференциальное уравнение...
Простите...
P
?
t
0
Мы должны будем смочь изобразить на графике изменение численности оленей P с течением времени t.
Хм, так... По горизонтальной оси отмечают независимые переменные, по вертикальной – зависимые переменные....
Значит, время t – это независимая переменная, а численность оленей P – зависимая.
P
Зависимая переменная
Независимая переменная
t
0
Понял? Прежде всего надо определить в дифференциальном уравнении, где независимые переменные, а где зависимые.
Зависимая переменная
$\frac{dP}{dt} = \mu P$
Независимая переменная
Да.
А теперь очень важный момент!


ПОСМОТРИ НА ЭТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ О-ОЧЕНЬ ВНИМАТЕЛЬНО!
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$
ХММ?
С ОБЕИХ СТОРОН СТОИТ P, И ХОЧЕТСЯ НА НЕГО РАЗДЕЛИТЬ...
$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu$
...ОСОБО НЕ ХОЧЕТСЯ...
НУЖНО, ЧТОБЫ ХОТЕЛОСЬ!!
ТЕБЕ НЕ ХВАТАЕТ СТРЕМЛЕНИЯ К ЗНАНИЯМ!
ВЖИХ
КАКОГО ЕЩЕ СТРЕМЛЕНИЯ?!
А ТЕПЕРЬ ПРОИНТЕГРИРУЕМ ОБЕ ЧАСТИ!
$\int \frac{1}{P}\mathrm{d}P = \mu \int \mathrm{d}t$
ХОРОШО, ХОРОШО...
ТЕПЕРЬ В УРАВНЕНИИ ПЕРЕМЕННЫЕ P ОСТАЛИСЬ В ЛЕВОЙ ЧАСТИ, А ПЕРЕМЕННАЯ t – В ПРАВОЙ, ВИДИШЬ?
Левая часть
Правая часть
$\int \frac{1}{P}\mathrm{d}P = \mu \int \mathrm{d}t$
И ПРАВДА.

Решение будет выглядеть вот так:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$$

Делим обе части на P

$$\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu$$

Интегрируем

$$\int \frac{1}{P}\mathrm{d}P = \mu \int \mathrm{d}t$$

Исходя из формулы $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$, левая часть станет такой:

$$\int \frac{1}{P}\mathrm{d}x = \ln|P| + C_1 \qquad \mu \int \mathrm{d}t = \mu t + C_2$$

Объединим интегральные константы

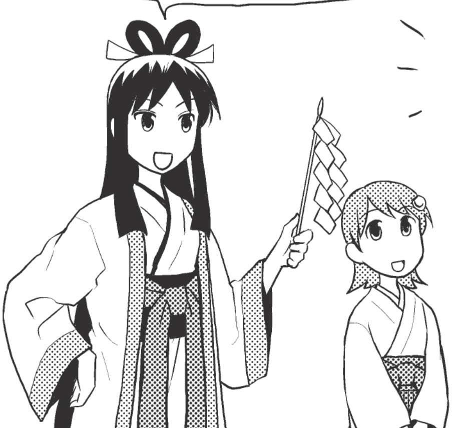
$$\ln|P| = \mu t + C$$

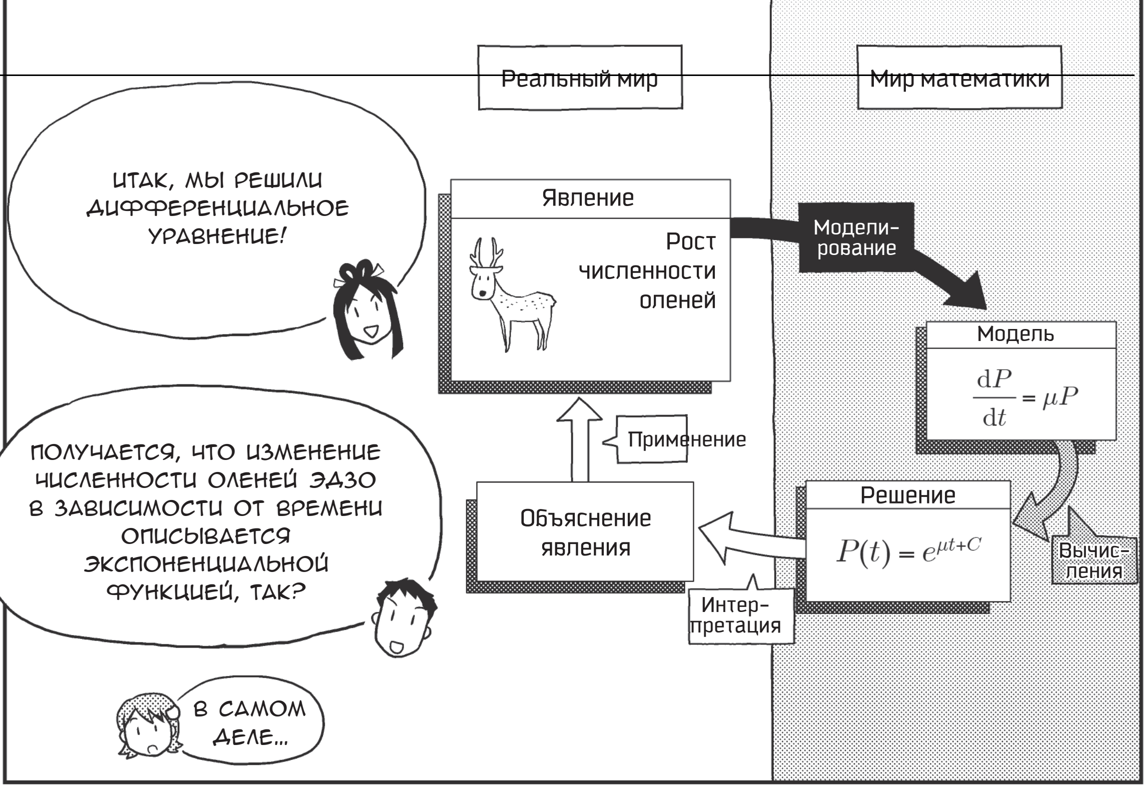
Выразим P

Поскольку P – это численность оленей эдзо, то обратите внимание, что его значение должно быть больше нуля.

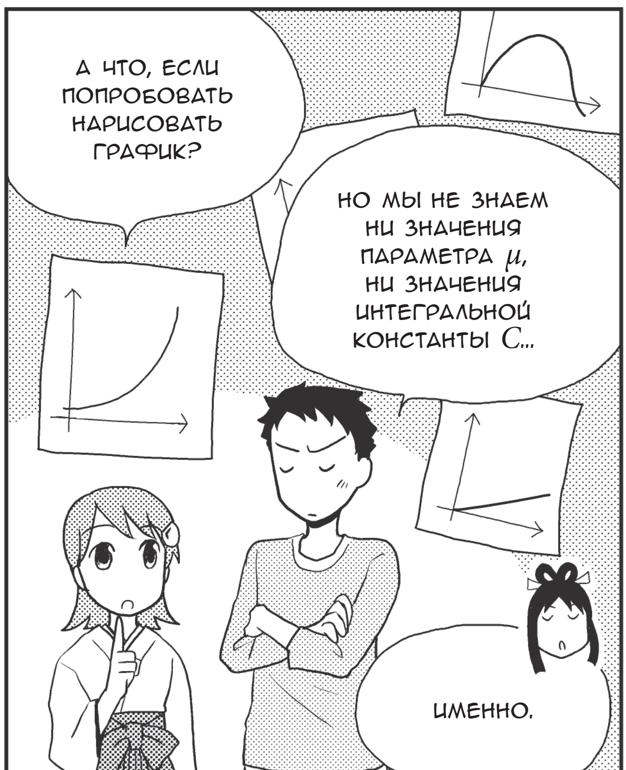
Решение дифференциального уравнения

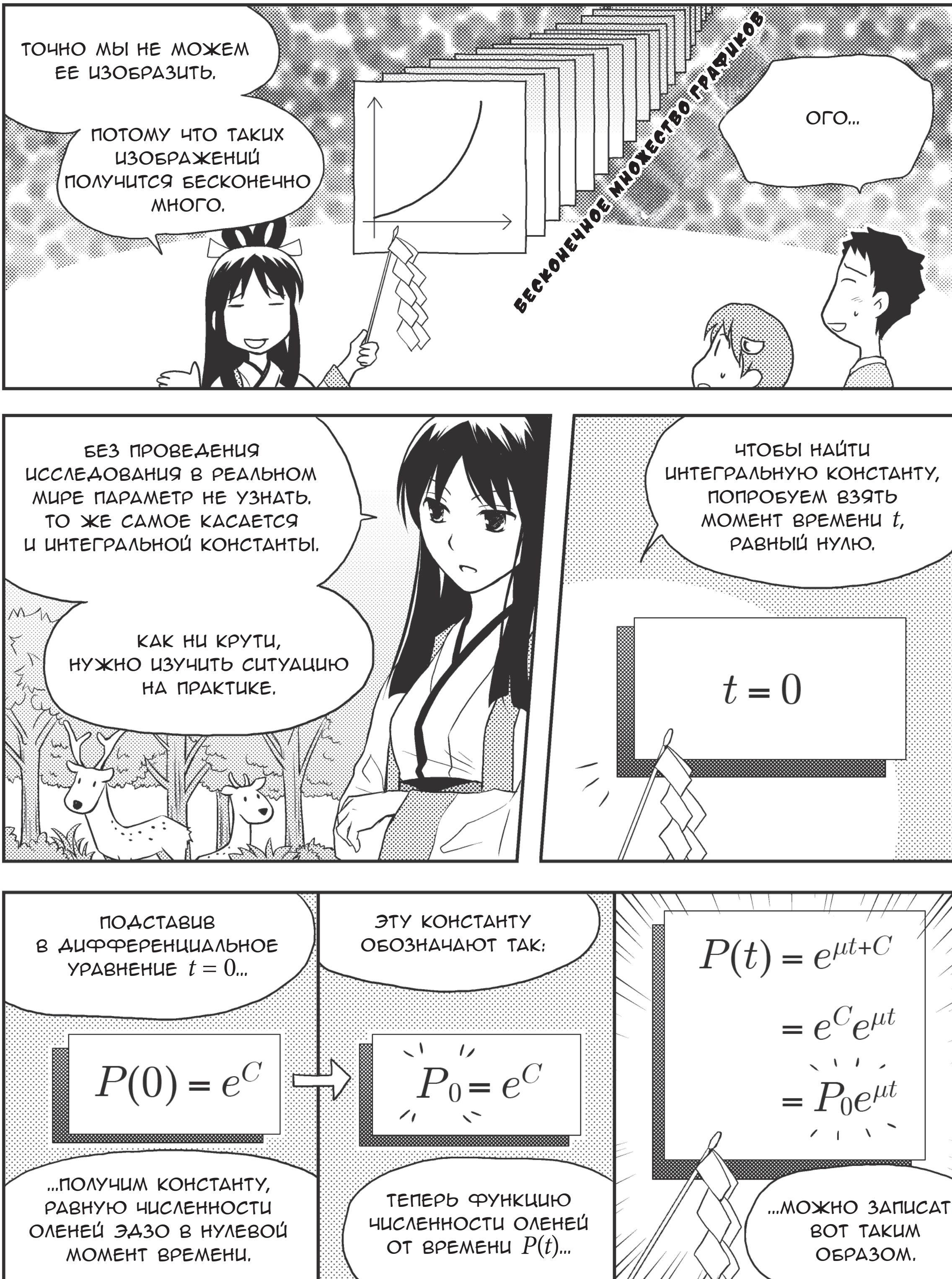
$$P(t) = e^{\mu t + C}$$



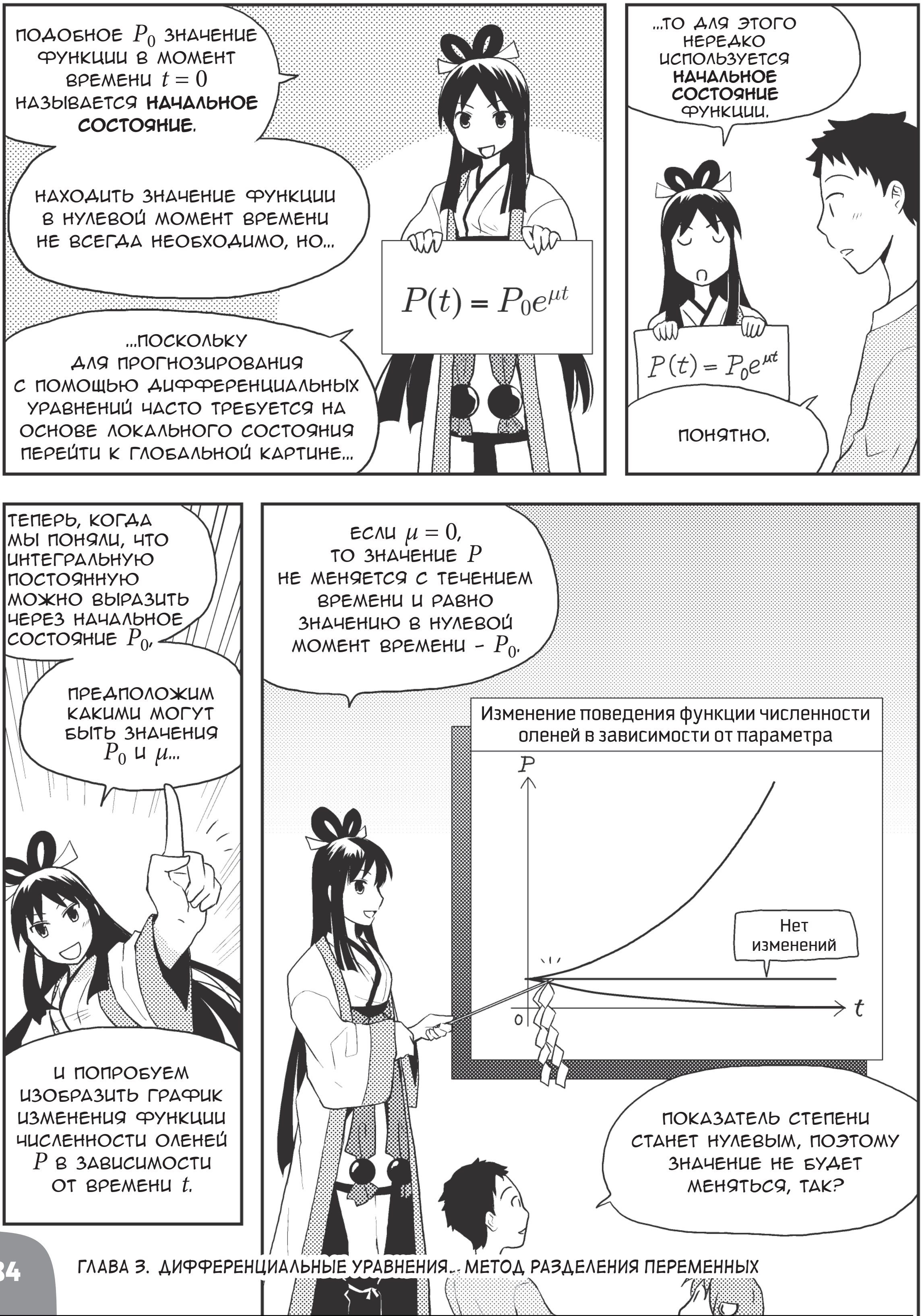


4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

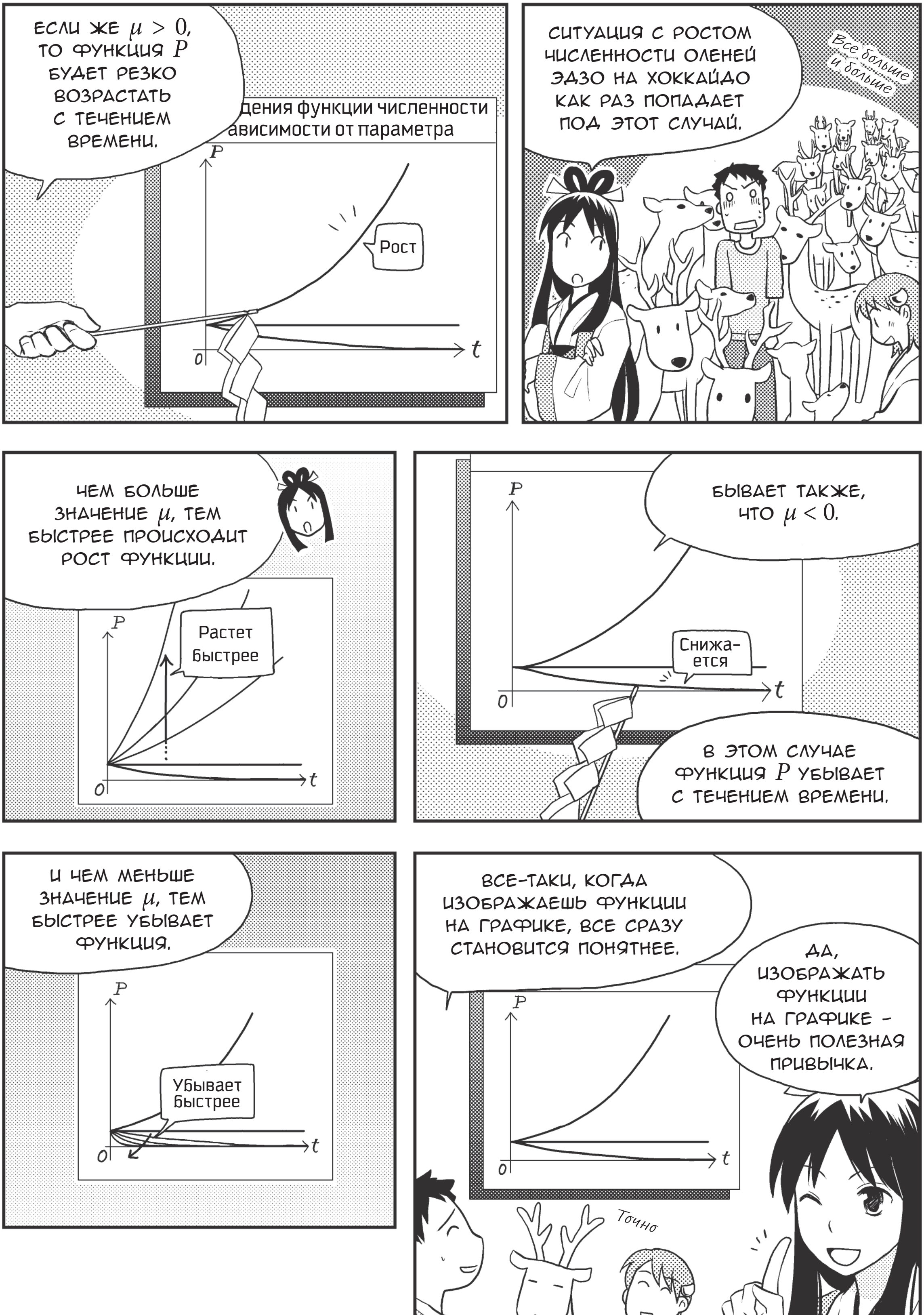


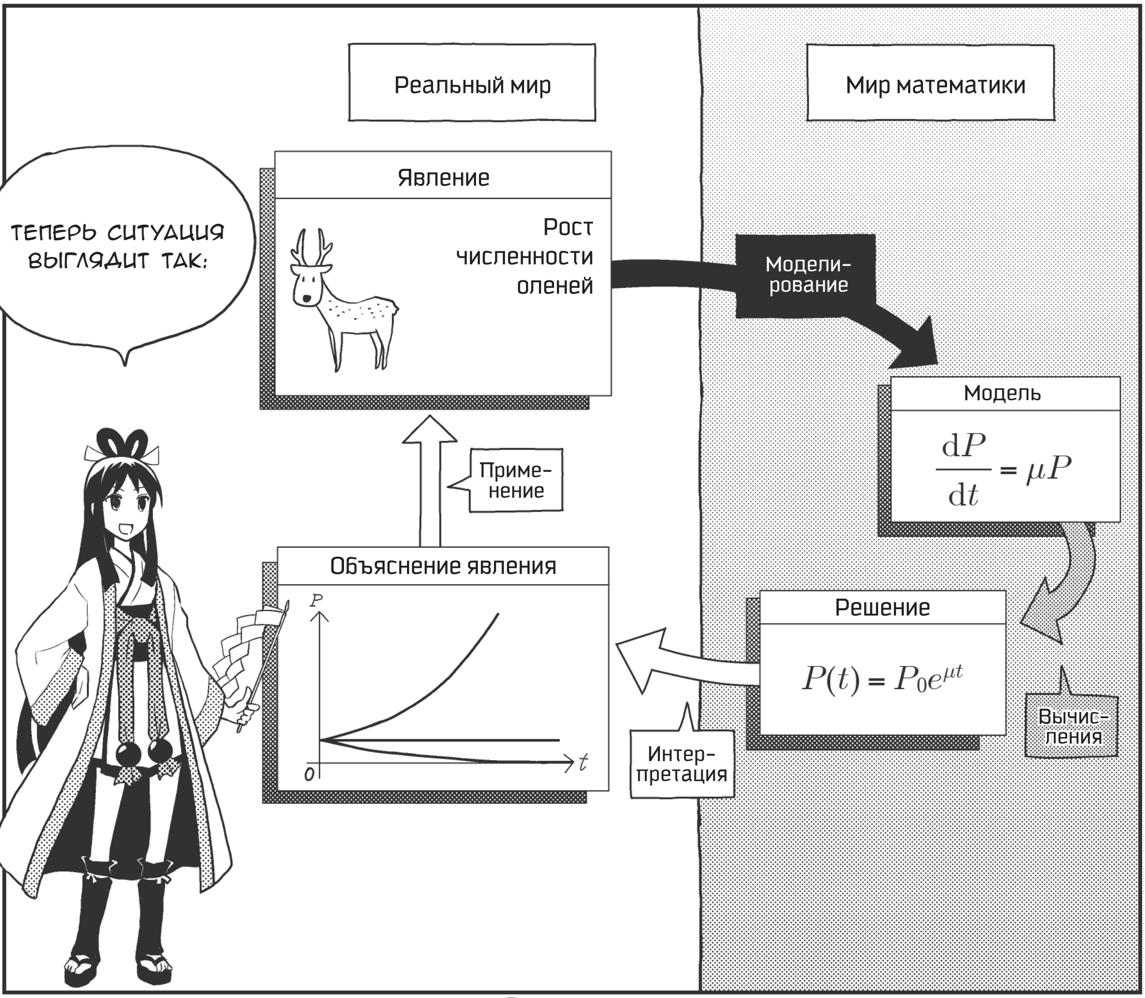


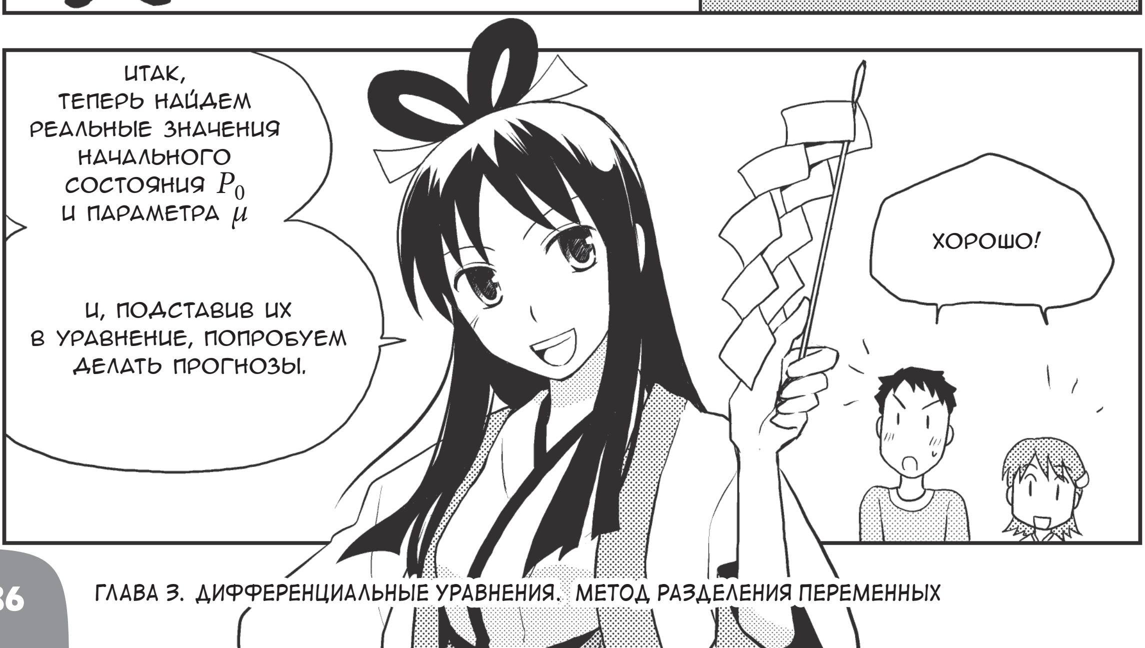
Точно мы не можем ее изобразить.
Потому что таких изображений получится бесконечно много.
Бесконечное множество графиков
Ого...
Без проведения исследования в реальном мире параметр не узнать. То же самое касается и интегральной константы.
Как ни крути, нужно изучить ситуацию на практике.
Чтобы найти интегральную константу, попробуем взять момент времени t, равный нулю.
$t = 0$
Подставив в дифференциальное уравнение $t = 0$...
$P(0) = e^C$
...получим константу, равную численности оленей эдзо в нулевой момент времени.
Эту константу обозначают так:
$P_0 = e^C$
Теперь функцию численности оленей от времени $P(t)$...
$P(t) = e^{\mu t + C}$
$= e^C e^{\mu t}$
$= P_0 e^{\mu t}$
...можно записать вот таким образом.

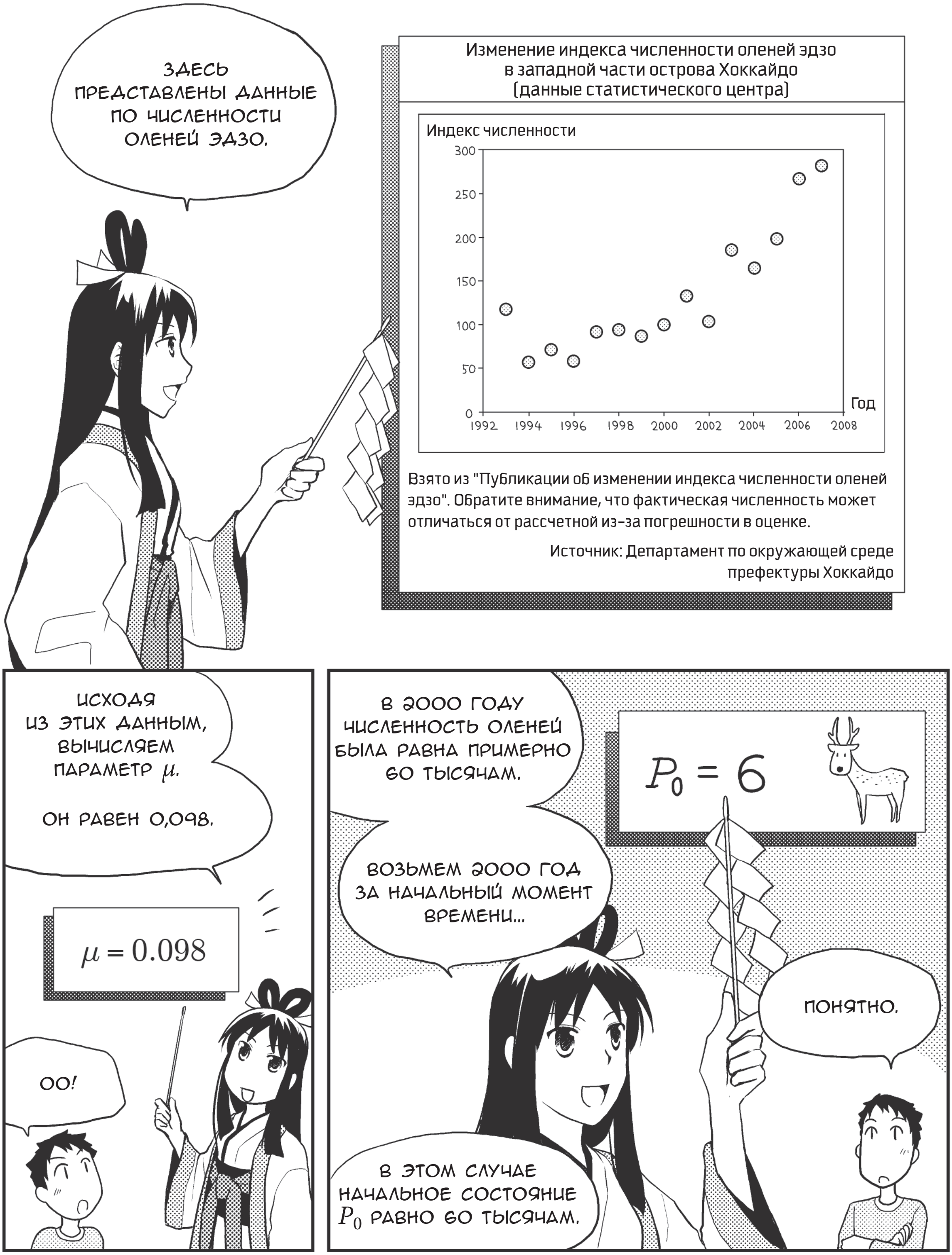


Подобное P_0 значение функции в момент времени $t = 0$ называется **начальное состояние**.
Находить значение функции в нулевой момент времени не всегда необходимо, но...
$P(t) = P_0 e^{\mu t}$
...поскольку для прогнозирования с помощью дифференциальных уравнений часто требуется на основе локального состояния перейти к глобальной картине...
...то для этого нередко используется **начальное состояние** функции.
$P(t) = P_0 e^{\mu t}$
Понятно.
Теперь, когда мы поняли, что интегральную постоянную можно выразить через начальное состояние P_0,
предположим какими могут быть значения P_0 и μ...
и попробуем изобразить график изменения функции численности оленей P в зависимости от времени t.
Если $\mu = 0$, то значение P не меняется с течением времени и равно значению в нулевой момент времени – P_0.
Изменение поведения функции численности оленей в зависимости от параметра
P
Нет изменений
0
t
Показатель степени станет нулевым, поэтому значение не будет меняться, так?

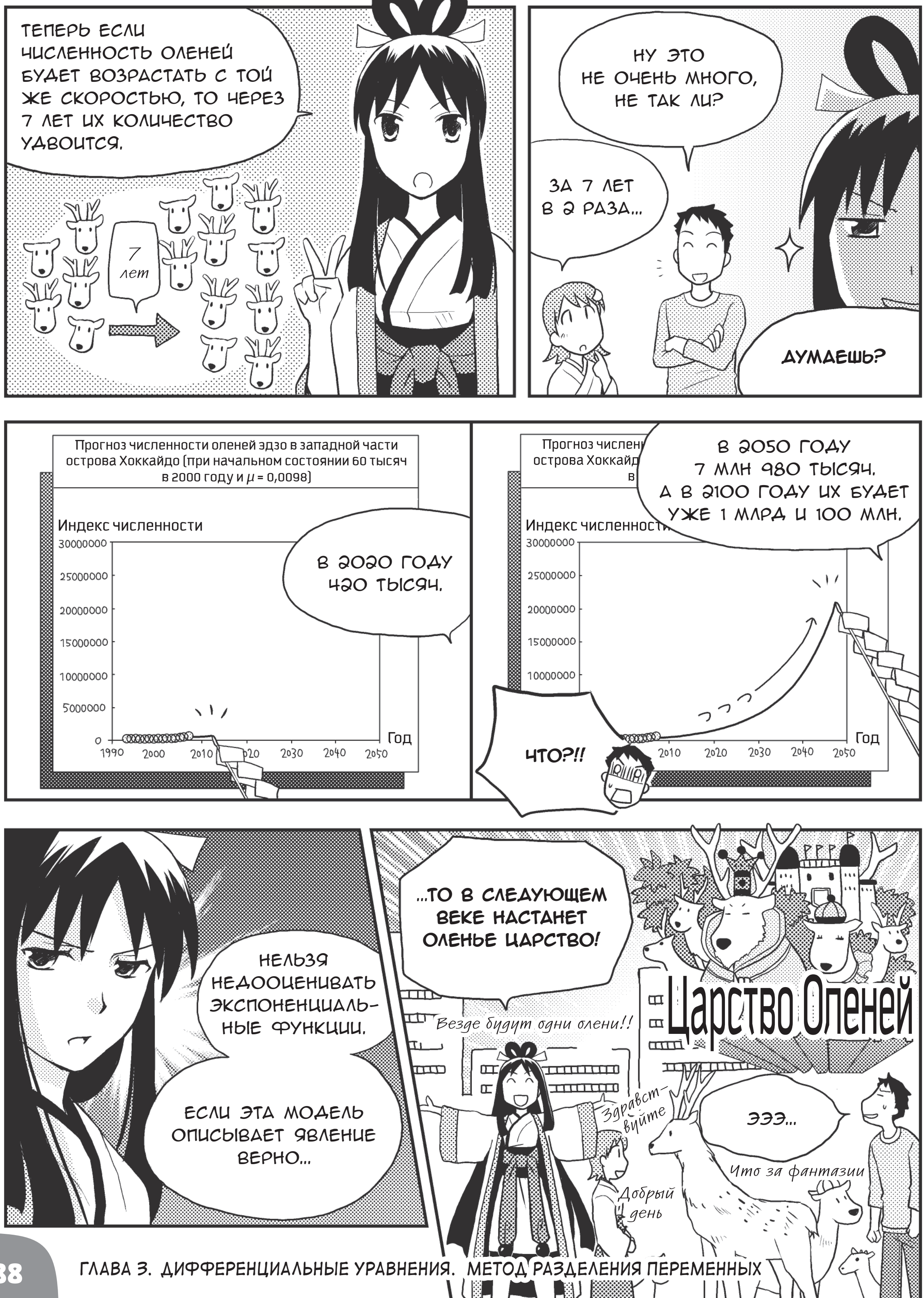

Если же $\mu > 0$, то функция P будет резко возрастать с течением времени.
дения функции численности
ависимости от параметра
P
Рост
0
t
Ситуация с ростом численности оленей эдзо на Хоккайдо как раз попадает под этот случай.
Все больше и больше
Чем больше значение μ, тем быстрее происходит рост функции.
P
Растет быстрее
0
t
Бывает также, что $\mu < 0$.
P
Снижа-ется
0
t
В этом случае функция P убывает с течением времени.
И чем меньше значение μ, тем быстрее убывает функция.
P
Убывает быстрее
0
t
Все-таки, когда изображаешь функции на графике, все сразу становится понятнее.
Да, изображать функции на графике – очень полезная привычка.
P
0
t
Точно


Реальный мир
Мир математики
Теперь ситуация выглядит так:
Явление
Рост численности оленей
Моделирование
Модель
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$$
Вычисления
Решение
$$P(t) = P_0 e^{\mu t}$$
Интерпретация
Объяснение явления
P
t
0
Применение

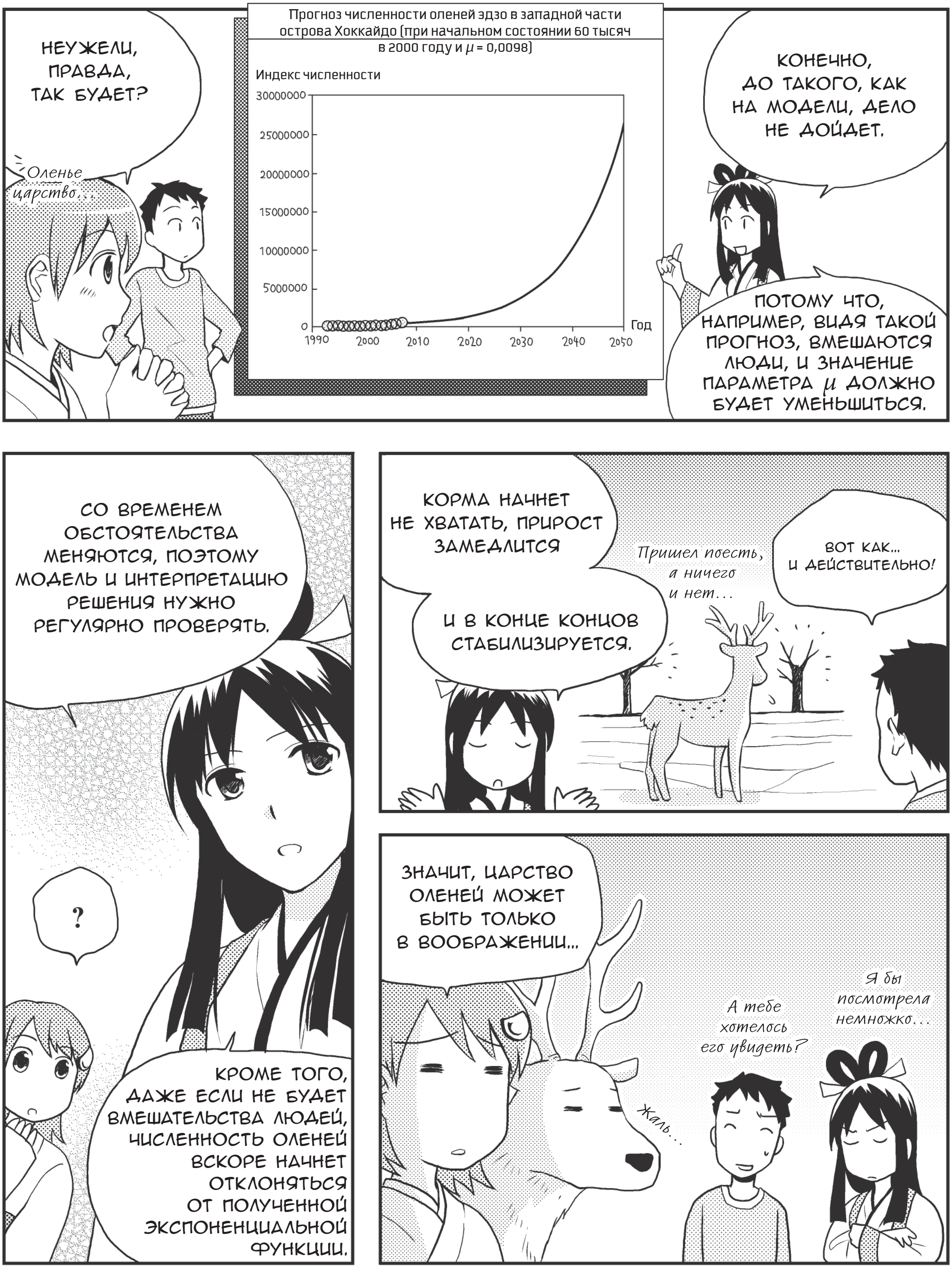

Итак, теперь найдем реальные значения начального состояния P_0 и параметра μ
и, подставив их в уравнение, попробуем делать прогнозы.
Хорошо!

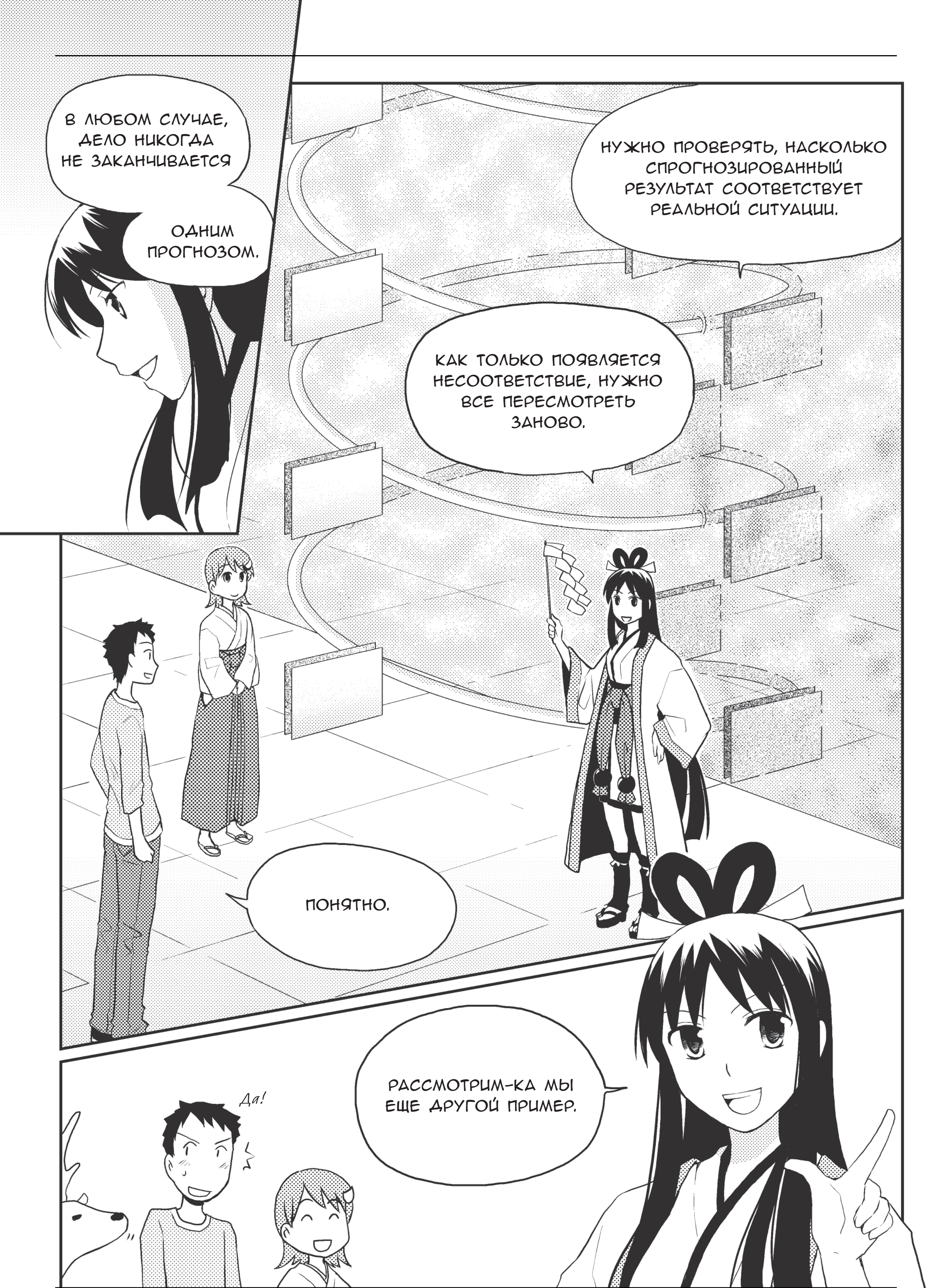


Здесь представлены данные по численности оленей эдзо.
Изменение индекса численности оленей эдзо в западной части острова Хоккайдо (данные статистического центра)
Индекс численности
300
250
200
150
100
50
0
1992 1994 1996 1998 2000 2002 2004 2006 2008
Год
Взято из "Публикации об изменении индекса численности оленей эдзо". Обратите внимание, что фактическая численность может отличаться от рассчетной из-за погрешности в оценке.
Источник: Департамент по окружающей среде префектуры Хоккайдо
Исходя из этих данным, вычисляем параметр μ.
Он равен 0,098.
$\mu = 0.098$
Оо!
В 2000 году численность оленей была равна примерно 60 тысячам.
$P_0 = 6$
Возьмем 2000 год за начальный момент времени...
Понятно.
В этом случае начальное состояние P_0 равно 60 тысячам.



Теперь если численность оленей будет возрастать с той же скоростью, то через 7 лет их количество удвоится.
7 лет
Ну это не очень много, не так ли?
За 7 лет в 2 раза...
Думаешь?
Прогноз численности оленей эдзо в западной части острова Хоккайдо (при начальном состоянии 60 тысяч в 2000 году и μ = 0,0098)
Индекс численности
Год
В 2020 году 420 тысяч.
В 2050 году 7 млн 980 тысяч. А в 2100 году их будет уже 1 млрд и 100 млн.
Что?!!
Нельзя недооценивать экспоненциальные функции.
Если эта модель описывает явление верно...
...то в следующем веке настанет оленье царство!
Царство Оленей
Везде будут одни олени!!
Здравствуйте
Добрый день
Эээ...
Что за фантазии


Прогноз численности оленей эдзо в западной части острова Хоккайдо (при начальном состоянии 60 тысяч в 2000 году и μ = 0,0098)
Индекс численности
30000000
25000000
20000000
15000000
10000000
5000000
0
Год
1990
2000
2010
2020
2030
2040
2050
НЕУЖЕЛИ, ПРАВДА, ТАК БУДЕТ?
Оленье царство...
КОНЕЧНО, ДО ТАКОГО, КАК НА МОДЕЛИ, ДЕЛО НЕ ДОЙДЕТ.
ПОТОМУ ЧТО, НАПРИМЕР, ВИДЯ ТАКОЙ ПРОГНОЗ, ВМЕШАЮТСЯ ЛЮДИ, И ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА μ ДОЛЖНО БУДЕТ УМЕНЬШИТЬСЯ.
СО ВРЕМЕНЕМ ОБСТОЯТЕЛЬСТВА МЕНЯЮТСЯ, ПОЭТОМУ МОДЕЛЬ И ИНТЕРПРЕТАЦИЮ РЕШЕНИЯ НУЖНО РЕГУЛЯРНО ПРОВЕРЯТЬ.
?
КРОМЕ ТОГО, ДАЖЕ ЕСЛИ НЕ БУДЕТ ВМЕШАТЕЛЬСТВА ЛЮДЕЙ, ЧИСЛЕННОСТЬ ОЛЕНЕЙ ВСКОРЕ НАЧНЕТ ОТКЛОНЯТЬСЯ ОТ ПОЛУЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.
КОРМА НАЧНЕТ НЕ ХВАТАТЬ, ПРИРОСТ ЗАМЕДЛИТСЯ
И В КОНЦЕ КОНЦОВ СТАБИЛИЗИРУЕТСЯ.
Пришел поесть, а ничего и нет...
ВОТ КАК... И ДЕЙСТВИТЕЛЬНО!
ЗНАЧИТ, ЦАРСТВО ОЛЕНЕЙ МОЖЕТ БЫТЬ ТОЛЬКО В ВООБРАЖЕНИИ...
Жаль...
А тебе хотелось его увидеть?
Я бы посмотрела немножко...


В любом случае, дело никогда не заканчивается
одним прогнозом.
Нужно проверять, насколько спрогнозированный результат соответствует реальной ситуации.
Как только появляется несоответствие, нужно все пересмотреть заново.
Понятно.
Рассмотрим-ка мы еще другой пример.
Да!

5. ЗАКОН МАЛЬТУСА

Когда мы в процессе моделирования перенесли явление из реального мира в мир математики, мы получили абстрактный образ явления в виде формулы. Приняв численность оленей эдзо за P, а время за t:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P,$$

получили это дифференциальное уравнение. В этой модели темп прироста численности оленей эдзо $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ пропорционален численности оленей P.

Ага.

Однако в абстрактном мире математики то, что P – это численность оленей эдзо, не имеет никакого значения.

То есть мы что, напрасно тратили время?..

Совсем нет! Я хочу сказать, что тем же самым дифференциальным уравнением могут описываться разные явления реального мира, и P может интерпретироваться по-разному, в зависимости от исследуемого явления. P может обозначать что угодно, если только P и $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ пропорциональны.

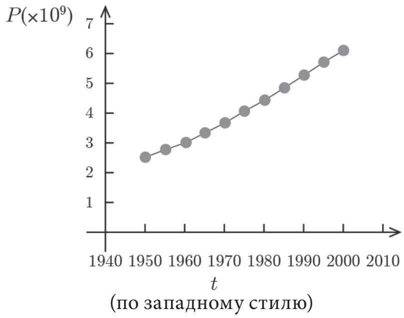
Например, численность мирового населения или скорость распространения нового товара, да?

Да, например, еще рост численности бактерий. Таких явлений, когда темп прироста пропорционален численности, довольно много.

Широко известно, что мировое население постоянно увеличивается, так?

Речь о демографическом взрыве?

На самом деле тут проблема не просто в росте численности населения, а в том, что этот рост – экспоненциальный. И даже если бы дело было только в экспоненциальном росте населения, это не проблема, но суть в том, что при этом необходимые человечеству ресурсы не растут экспоненциально.



**Экспоненциальный рост
мировой численности населения**

Мировая численность населения[1]

И в конце концов ресурсов будет не хватать, да?

Да. Например, людям для жизни нужна еда, но производство продуктов питания не растет экспоненциально. А численность населения при этом увеличивается в разы. Чтобы увеличить производство продуктов питания, нужно либо увеличить площадь полей и пастбищ, либо поднять эффективность производства. Регулярно увеличивать в разы площадь полей и пастбищ физически не возможно.

Да уж, это точно...

Как ни старайся, наступит момент, когда земля закончится[2]. А увеличить в разы эффективность производства еще труднее. Другими словами, рост численности населения и рост продуктов питания качественно разные, и поэтому количество продуктов питания на человека начнет снижаться, а в конце концов наступит момент, когда оно станет критически низким[3].

Значит, когда-нибудь настанет голод[4], да?

Первым человеком, кто выявил различия в росте численности населения и производства продуктов питания, был Мальтус.

Мальтус?..

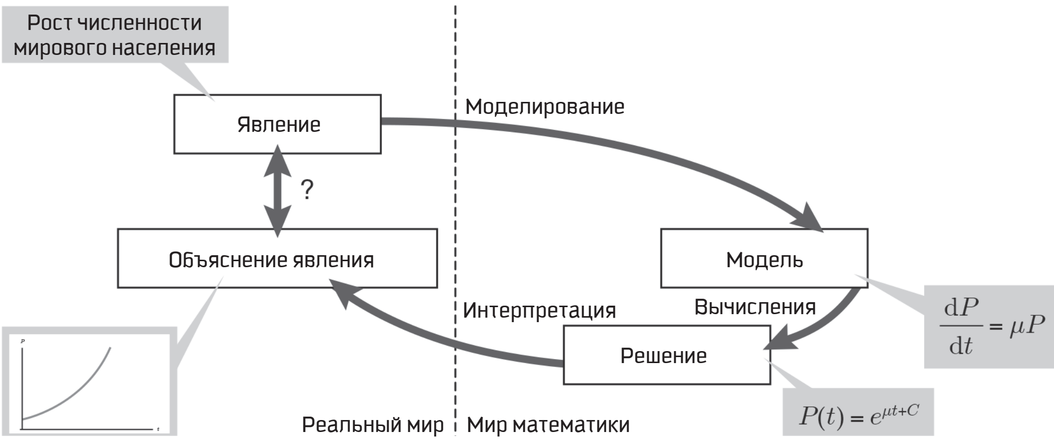
---

1 Источник данных: ООН.

2 Хотя может показаться, что доступной земли на планете еще много, но на самом деле пригодной для сельского хозяйства земли гораздо меньше, чем кажется. И надо помнить, что, кроме самой земли, значение имеют также вода, дневной свет, температура воздуха и т. д.

3 Существуют изменения, которые происходят в арифметической или в геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия – это когда изменения происходят в разы, а арифметическая – когда изменения происходят каждый раз на одно фиксированное число.

4 Не «когда-нибудь», а, возможно, уже сейчас. Хотя все человечество не страдает от голода в равной степени, но есть бедные регионы, где проблема голода существует и сегодня.



Моделирование явления роста мирового населения

Закон Мальтуса говорит о том, что темп прироста численности населения пропорционален численности населения. Здесь t – это время, $P(t)$ – численность населения, $\mathrm{d}P(t)/\mathrm{d}t$ – темп прироста численности населения, μ – коэффициент пропорциональности:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P.$$ ← Дифференциальное уравнение, описывающее рост численности населения

Параметр μ называют **коэффициентом прироста**, а также **коэффицинтом Мальтуса**.

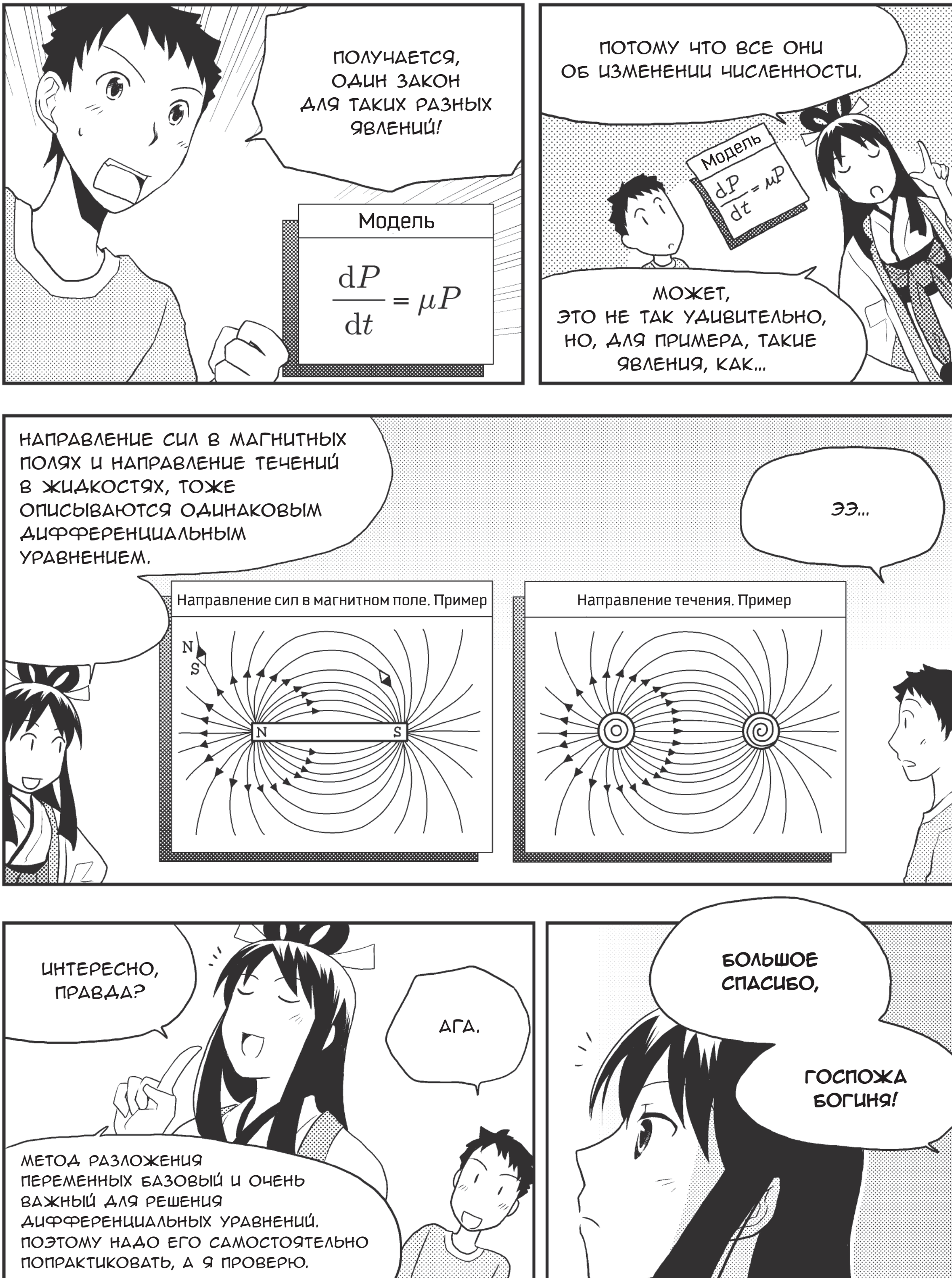
Для микроорганизмов, подобных бактериям, тоже верно утверждение, что темп прироста их численности $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ пропорционален численности P. И дифференциальное уравнение будет выглядеть так же:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P.$$ ← Дифференциальное уравнение, описывающее рост численности бактерий

Скорость размножения бактерий довольно большая.

Конечно, по сравнению с людьми, их численность увеличивается очень быстро. Поэтому значение коэффициента роста μ будет значительно выше[5].

[5] Например, при благоприятных условиях количество кишечных палочек удваивается за 20–30 минут. Этот промежуток времени называется **период генерации**.



Получается, один закон для таких разных явлений!
Модель
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$$
Потому что все они об изменении численности.
Модель
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \mu P$$
Может, это не так удивительно, но, для примера, такие явления, как...
Направление сил в магнитных полях и направление течений в жидкостях, тоже описываются одинаковым дифференциальным уравнением.
Направление сил в магнитном поле. Пример
N
S
N
S
Направление течения. Пример
Ээ...
Интересно, правда?
Ага.
Метод разложения переменных базовый и очень важный для решения дифференциальных уравнений. Поэтому надо его самостоятельно попрактиковать, а я проверю.
Большое спасибо,
госпожа богиня!


...ММ.
НУ, ЭТО...
ДЕРЗАЙ!
!!!
...ХЕ-ХЕ.
?
ЧТО ТУТ СМЕШНОГО?
НИЧЕГО.
ПРОСТО ХОРОШЕЕ НАСТРОЕНИЕ.
Полон энергии
А?
ЧЕГО?
СТРАННЫЙ ПАРЕНЬ...
Итак, приступим!

6. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

Явление

На Хоккайдо обитает не только множество диких животных, таких как олени эдзо, но и человек проживает на этом острове с очень давних времен. В каждом регионе острова были найдены останки, среди которых есть такие, которым более 10 тысяч лет и которые относятся к палеолиту. Но как же смогли понять, что этим останкам более 10 тысяч лет? В археологии определяют возраст находок по совокупности данных, полученных с помощью анализа слоев почвы (стратиграфия), годичных колец деревьев и т. д. Сейчас среди методов датировки находок очень эффективным является метод радиоактивного распада[1].

Когда речь заходит о радиации, это сразу ассоциируется с опасностью. Но на самом деле в природе в определенном количестве всегда существуют радиоактивные вещества, и обычно их можно обнаружить вокруг нас[2]. В датировке же часто используется углерод – вещество, которое является одним из основных элементов формирования живых существ, включая человека.

Углерод, участвующий в формировании наших тел, изначально получен из углекислого газа, находящегося в атмосфере, который поглотили в процессе фотосинтеза растения. Если бы существовали такие часы, которые начали бы отсчет времени в тот момент, когда растение поглотило углерод, то можно было бы определить время, когда это растение существовало. Более того, так как животные поедают растения и в процессе поглощают тот самый углерод, то можно было бы определить и возраст животного, поглотившего это растение (и возраст животного, поглотившего это животное, и т. д). Но ведь таких полезных часов, наверное, не может существовать? А вот и нет, они существуют.

Изотоп углерода[3] – углерод-14[4] $^{14}_{6}C$ – образуется в результате реакции в атмосфере азота-14 с поступающей из космоса радиацией, после ее контакта с атомами верхних слоев атмосферы. Углерод-14, взаимодействуя с кислородом, образует углекислый газ, который затем распространяется в атмосфере.

Однако углерод-14 не может долго существовать в неизменном виде. Вскоре он начинает испускать радиацию, и образуется другой химический элемент[5]. Это происхо-

---

[1] Существуют также метод термолюминисценции, метод электронного парамагнитного резонанса и пр.

[2] Конечно, есть и радиоактивные вещества, созданные руками человека. А радиоативные вещества, существующие в природе, в большом количестве тоже опасны. И не только радиоактивные, но и прочие химические вещества, даже если они изначально существуют в природе, это не значит, что они безопасны.

[3] Изотопы – химические элементы с одинаковым атомным номером, но разными массовыми числами. Количество протонов у них одинаковое, а нейтронов – разное.

[4] Углерод с массовым номером – 14. У часто встречающегося углерода $^{12}_{6}C$ массовый номер – 12. Атомный номер углерода – 6.

[5] Происходит β-распад. В результате образуется азот-14.

дит не только с углеродом-14, образование нового химического элемента посредством испускания радиации называется радиоактивным распадом. Изотопы, обладающие такой способностью, называются радиоактивными изотопами (радионуклидами). Радионуклиды распадаются с определеной вероятностью. Так как в процессе распада они образуют другой химический элемент, то количество радионуклидов уменьшается (если извне не добавится новых).

Период времени, за который распадается половина от наличиствующих вначале радиоактивных атомов, называется периодом полураспада[6]. И этот период определен для радионуклидов. У углерода-14 период полураспада составляет 5730 лет. Даже если он вступит в реакцию с кислородом и образует углекислый газ, даже если его поглотят растения или животные, распад будет происходить, и каждые 5730 лет количество атомов углерода-14 будет сокращаться вдвое (если не образуются новые).

Как говорилось выше, углерод-14 образуется в верхних слоях атмосферы, однако в процессе распада его количество уменьшается, таким образом количество углерода-14 в атмосфере (в виде углекислого газа) балансируется и всегда примерно одинаково[7]. А также соотношение углерода-14 и углерода-12 в атмосфере постоянно[8].

У углекислого газа, содержащего углерод-14, и углекислого газа, содержащего углерод-12, химические свойства одинаковые[9], поэтому они одинаково поглощаются растениями в процессе фотосинтеза. Таким образом, клетки растений, осуществляющие фотосинтез (живые), должны содержать соотношение углерода-12 и углерода-14 такое же, как в атмосфере. Другими словами, пока клетка осуществляет фотосинтез, соотношение содержащихся в ней углерода-12 и углерода-14 постоянно.

Однако, когда клетка перестает осуществлять фотосинтез, углерод-14 перестает поступать в растение из атмосферы, и его количество по отношению к углероду-12 начинает снижаться. Другими словами, как только растение перестает поглощать углекислый газ, запускаются те самые часы. Причинами прекращения фотосинтеза могут быть, например, гибель растения, его одеревенение[10], поглощение животным и т. д. И таким образом, по останкам растения или животного, измерив соотношение углерода-12 и углерода-14, можно определить, когда остановился фотосинтез.

---

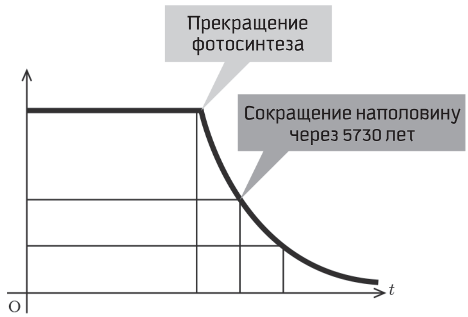
[6] Существуют радионуклиды, которые распадаются буквально моментально, но существуют и такие, которые распадаются очень долго, например период полураспада у урана-238 (наиболее часто встречающегося в природе) 4,5 млрд лет. А у урана-235 (который используется в атомной энергетике и ядерном оружии) – 700 млн лет.

[7] Это подобно тому, как если идти вниз по едущему вверх эскалатору, если идти со скоростью, равной скорости эскалатора, будешь все время оставаться на месте.

[8] Это постоянство определено не идеально точно. Были периоды, когда измерения проводились не очень аккуратно, и некоторые данные являются спорными.

[9] Физические свойства при этом разные. Например, так как массовое число у углерода-14 больше на 2 нейтрона, то скорость его распространения меньше.

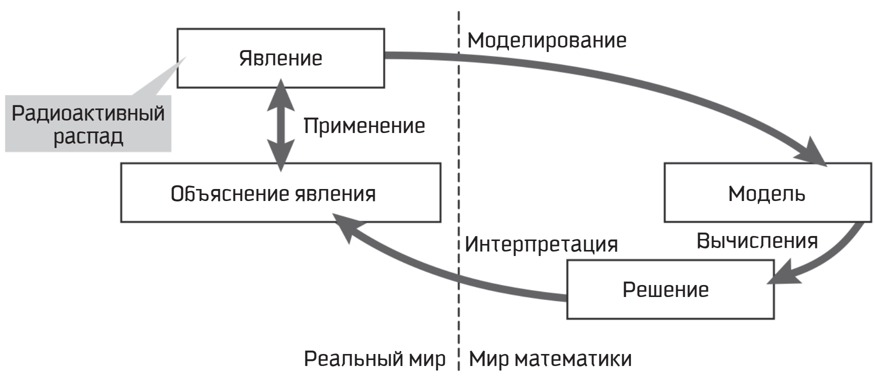
[10] У деревьев, чем ближе к центру годовых колец, тем содержание углерода-14 меньше.



Пока фотосинтез осуществляется, соотношение постоянно, после же прекращения фотосинтеза, через 5730 лет содержание углерода-14 уменьшается вдвое. То есть, измерив соотношение углерода-12 и углерода-14, мы можем понять, когда прекратился фотосинтез.

Содержание в организме углерода-14 по отношению к углероду-12

Однако хотя ранее было сказано, что все радионуклиды распадутся с определенной вероятностью, это не значит, что мы можем узнать про какой-либо конкретный атом радионуклида, когда он распадется. Он может распасться в любой момент, сейчас или через много-много лет. Время распада конкретного атома неопределенно. Но если мы наблюдаем не один атом, а совокупность одинаковых атомов радионуклидов, то в этом случае мы уже можем прогнозировать, какой процент этих атомов через какое время распадется. Другими словами, коэффициент изменения количества атомов (скорость распада) пропорционален количеству атомов. Что? Кажется, где-то уже была похожая фраза. Так и есть, когда мы говорили о модели, описывающей рост численности оленей эдзо, что количество оленей $P(t)$ пропорционально темпу прироста их численности $P(t)/\mathrm{d}t$. Вероятно, что и в данном случае мы можем построить математическую модель радиоактивного распада.



Пытаемся описать явление распада радионуклидов

Описание радиоактивного распада

Модель

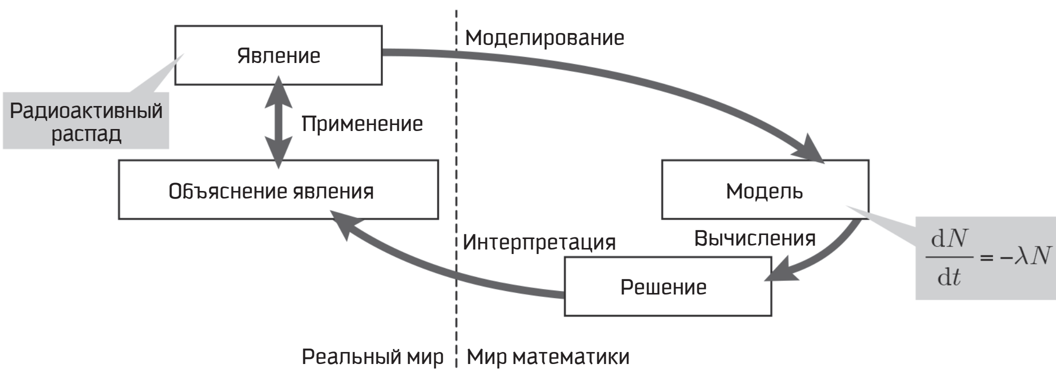
Итак, попробуем создать модель, объясняющую распад радиоактивных веществ. Тут я хочу обратить ваше внимание на то, что нам не важно, «почему» происходит это явление[11]. Конечно, желание понять причины, почему мы не можем спрогнозировать время распада конкретного атома, понятно. Если есть возможность что-то узнать, это всегда лучше. Однако существует множество явлений, о которых мы знаем, как они происходят, но не знаем, почему. Поэтому отложим на время понимание механизмов явления, а сосредоточимся только на попытке его описания. В процессе многое должно проясниться.

Если мы сможем так смоделировать математически явление, чтобы понимать, при каких условиях оно происходит, наша цель будет достигнута. И хотя мы не знаем механизмов радиоактивного распада, но мы знаем, что изменение численности атомов пропорционально их общему числу, и это мы можем отразить в математической моделе.

Обозначим через t время, через $N(t)$ – количество радиоактивных атомов, тогда скорость изменения количества атомов $N(t)/\mathrm{d}t$ будет пропорциональна их общему числу $N(t)$. Если это записать в виде формулы, где λ – это коэффициент пропорциональности, то получим:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \tag{3.1}$$

(дифференциальное уравнение, описывающее изменение числа атомов в процессе радиоактивного распада).



На основании того, что изменение количества атомов в результате радиоактивного распада пропорционально количеству атомов, мы можем записать модель в виде дифференциального уравнения, где d$N(t)$/dt – это коэффициент изменения количества атомов, а $N(t)$ – количество атомов

Модель, описывающая явление радиоактивного распада радионуклидов

[11] Это общее замечание, оно касается не только радиационного разложения. То же самое можно сказать и о модели, описывающий численность оленей эдзо.

Так как количество атомов N с течением времени уменьшается, перед коэффициентом λ пропорциональности стоит знак минус[12]. Как и в случае с численностью оленей эдзо, мы не можем определить значение параметра λ только на основании модели[13].

Решение

Итак, попробуем решить полученное дифференциальное уравнение. Если сравнить это уравнение с уравнением на стр. 77, формула (3.1) – то мы увидим, что у них общий вид[14]. Если же уравнения одного вида, то и решения их будут одинаковыми. Хотя мы уже разобрали решение раньше[15], сейчас решим такое уравнение еще раз, чтобы потренироваться.

Наша задача – получить функцию количества радиоактивных атомов в зависимости от времени – $N(t)$. Посмотрим, где в нашем уравнении находится эта переменная – N.

Зависимая переменная

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

Независимая переменная

Как и прежде, разделим переменные. Поделим обе части уравнения на N:

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda.$$

А теперь проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{1}{N}\mathrm{d}N = -\lambda \int \mathrm{d}t.$$

Слева – переменные N, справа – t. Мы разделили переменные по разным частям уравнения.

$$\int \frac{1}{N}\mathrm{d}N = -\lambda \int \mathrm{d}t.$$

Преобразуем интегралы:

$$\int \frac{1}{N}\mathrm{d}N = \ln|N| + C_1;$$

$$-\lambda \int \mathrm{d}t = -\lambda t + C_2.$$

---

12 Можно, конечно, просто определить, что параметр имеет отрицательное значение, но запись параметра со знаком минус – нагляднее.

13 Как будет упомянуто в дальнейшем, скорость распада разных радионуклидов отличается, поэтому и значение параметра λ будет различным.

14 Общий вид означает, что отличаются только переменные.

15 Соответствует ситуации на графике на стр. 85, когда $\mu < 0$.

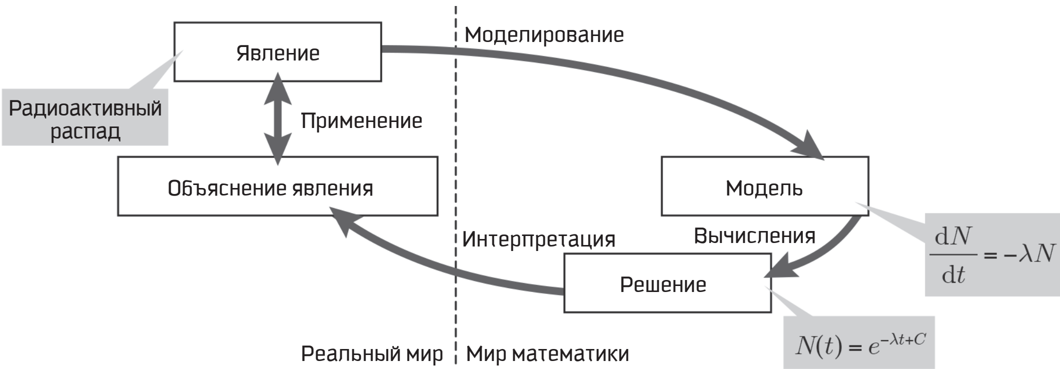
Объединим интегральные константы:

$\ln|N| = -\lambda t + C.$

Итого, мы получили функцию количества радиоактивных атомов в зависимости от времени $N(t)$[16]:

$N(t) = e^{-\lambda t + C}.$ ← Решение дифференциального уравнения (3.2)

Таким образом, мы решили дифференциальное уравнение.



Решив дифференциальное уравнение, выясняем, что изменение количества радиоактивных атомов в зависимости от времени выражается экспоненциальной функцией.

Модель, описывающая явление радиоактивного распада

Интерпретация

Теперь определим интегральную константу. Обозначим за $N_0 = N(0)$ количество радиоактивных атомов в нулевой момент времени. Это будет начальное состояние. Из уравнения (3.2) получаем:

$N(0) = e^c,$

следовательно:

$N_0 = e^c.$

Теперь функцию количества радиоактивных атомов можно представить вот так:

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$ (3.3)

Мы разобрались с интегральной константой, теперь можем предположить значение параметра λ и изобразить графически фукцию изменения количества радиоактивных атомов N в зависимости от времени t. В нашем случае $\lambda > 0$, поэтому количество атомов будет непременно уменьшаться.

[16] Так как N – это количество радиоактивных атомов, то $N > 0$.

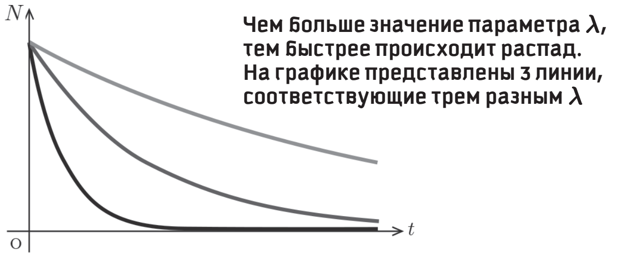
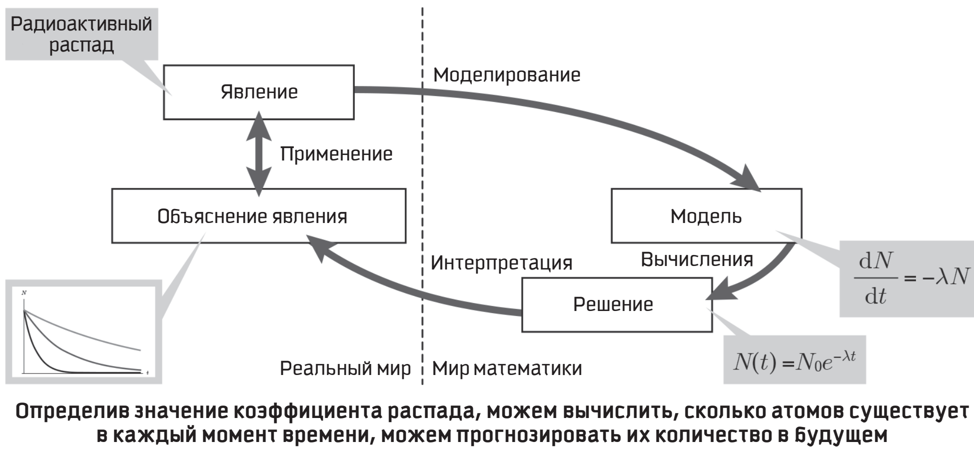


График изменения количества радиоактивных атомов N в зависимости от времени t

Чем больше значение параметра λ, тем быстрее снижается количество атомов (на графике представлены 3 линии, соответствующие трем разным λ). Скорость распада у разных радионуклидов отличается, если скорость распада высокая, то значение параметра λ будет большим, если низкая, то и значение параметра λ будет маленьким. Так как λ показывает скорость распада, его называют **коэффициентом распада**. Вычислив значение коэффициента распада на основе реальных данных, можно понять, в какой момент времени какое количество радиоактивных атомов будет существовать, как в будущем, так и в прошлом.



Решение и интерпретация модели, описывающей явление радиоактивного распада

Исследуем связь между периодом полураспада и коэффициентом распада. Обозначим период полураспада как $t_{1/2}$, тогда если в нулевой момент времени количество атомов равно N_0, то в момент времени $t_{1/2}$ количество атомов будет равно $N_0/2$. Исходя из уравнения (3.3), получаем:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Отсюда следует, что период полураспада $t_{1/2}$ равен:

$$t_{1/2} = \frac{\ln|2|}{\lambda} \sim \frac{0.69}{\lambda}.$$

Другими словами, период полураспада обратно пропорционален коэффициенту распада[17].

Однако то, что мы можем измерить, – это уровень радиации[18]. Уровень радиации пропорционален числу радиоактивных атомов[19]. Отсюда мы не можем напрямую рассчитать коэффициент распада, но можем рассчитать его, исходя из того, как уменьшается уровень радиации с течением времени.

Наконец, мы дошли до того, как производится датировка с помощью радиоактивных веществ. Радиоактивное вещество, излучая радиацию, распадается в другое химическое вещество, и это изменение происходит соответственно формуле (3.3). Для радионуклидов, у которых известен период полураспада (а значит, и коэффициент распада), если нам известно соотношение N/N_0, где N – это количество радиоактивных атомов в настоящий момент, а N_0 – количество атомов в прошлом (другими словами, соотношение уровня радиации), то мы можем вычислить временной интервал, прошедший с начального момента:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t};$$

$$\therefore t = \frac{\ln|N/N_0|}{\lambda}.$$

И это замечательно. Это означает, что мы можем определить возраст любых найденных реликтов, для которых известно соотношение N/N_0[20].

Говоря о найденных при раскопках артефактах, если, к примеру, предмет был изготовлен из дерева, то возможно определить, до какого момента это дерево осуществляло фотосинтез. Период времени, когда дерево было срублено, не обязательно соответствует периоду времени, когда предмет был изготовлен, но этим можно пренебречь. Так как в прошлые эпохи люди вряд ли специально откапывали для использования старую древесину, то можно предположить, что период изготовления предмета соответствует периоду гибели дерева. Если изучить, к примеру, даже валяющиеся рядом щепки, то можно наткнуться на очень древний материал[21].

17 Ведь само собой разумеется, что чем выше скорость распада, тем короче период, за который количество атомов уменьшится вдвое.

18 Для этого часто используют счетчик Гейгера-Мюллера или сцинтилляционный детектор. Для простого определения опасного уровня радиации используется пленочный дозиметр.

19 Если много радиоактивных атомов, то и уровень радиации высокий.

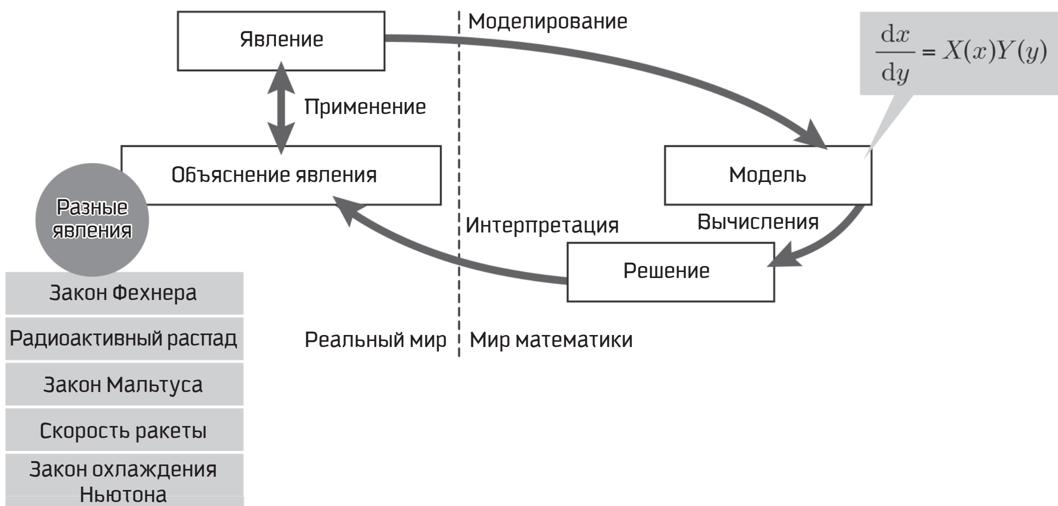
20 Если выражаться точнее, мы можем определить момент, когда прекратился фотосинтез.

21 Датировка посредством радионуклидов тем сложнее, чем старее исследуемый материал. Период полураспада углерода-14 – 5730 лет, следовательно, примерно за 6 тыс. лет его количество сократится вдвое, за 12 тыс. лет – в 4 раза, а через 60 тыс. лет останется только 1/1000 от изначального количества. А чем меньше количество, тем сложнее делать замеры. С помощью углерода-14 можно датировать период до нескольких десятков тысяч лет. Более древние материалы мы знаем плохо. Однако для камней существует способ датировки более древних материалов.

7. РАЗНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ОДНА МОДЕЛЬ

В предыдущих главах мы увидели, что дифференциальные уравнения одного вида описывают такие разные явления, как закон Мальтуса и радиоактивный распад. А использованный для решения этих дифференциальных уравнений метод разделения переменных является базовым. Суть этого метода в том, что мы разделям содержащиеся в уравнении две переменные и каждую по отдельности интегрируем. Это довольно простой метод, но он используется для решения дифференциальных уравнений, описывающих различные явления.

Кроме того, описание изменения температуры тела с течением времени при его охлаждении (закон охлаждения Ньютона, см. приложение 1), вычисление скорости ракеты (уравнение Циолковского, см. приложение 2), изменение интенсивности ощущений в зависимости от раздражителя (закон Фехнера, см. приложение 3) и другие явления также описываются дифференциальными уравнениями, которые решаются методом разделения переменных. Разве это не удивительно, что такие разные явления реального мира в мире математики описываются моделями одного вида?

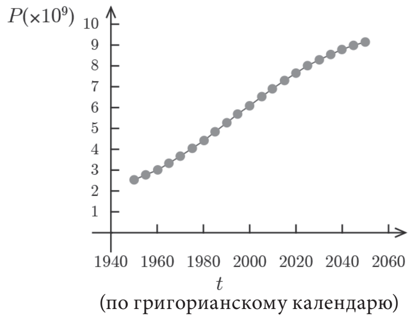


Разные явления, один вид модели

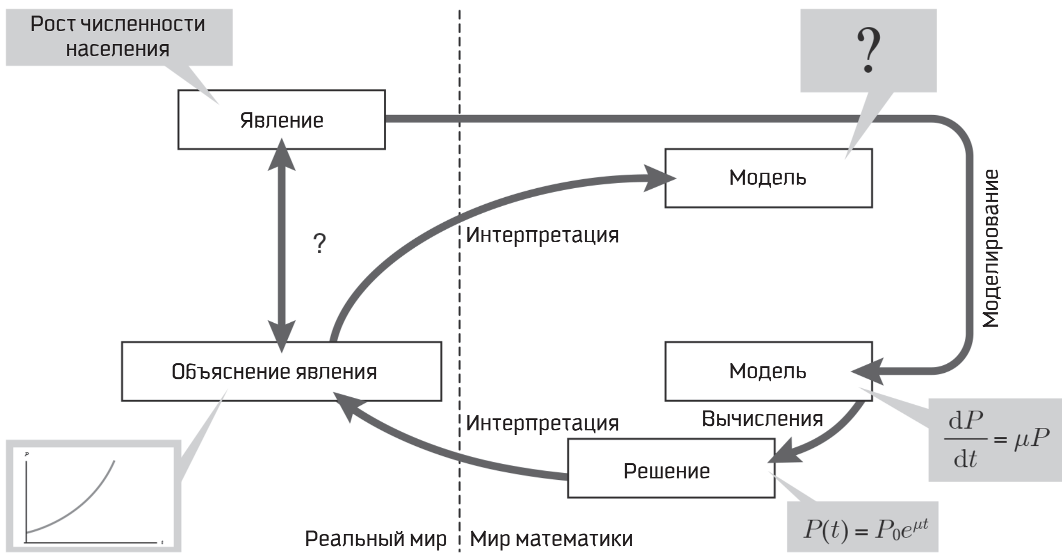
8. ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

На стр. 91, когда мы изучали закон Мальтуса, речь шла о том, что численность мирового населения постоянно возрастает. Однако на самом деле с недавних пор темп прироста численности населения снизился.

Если численность населения будет возрастать по экспоненте, то в какой-то момент масса всех людей на планете превысит массу планеты. А это уж точно никак не может быть. Закон Мальтуса может описать явление в локальном масштабе, но рано или поздно он начинает расходиться с реальностью.



Население планеты (прогноз)[22]



В построенной ранее модели роста численности населения коэффициент прироста возрастает, а в реальности он начал уменьшаться. Поскольку нас не удовлетворяют результаты, полученные в рамках этой модели, ее нужно скорректировать

Корректировка модели роста численности населения

22 Источник данных: ООН.

Это касается не только человека. Так, при культивации бактерий их численность сначала увеличивается экспоненциально, но когда с ростом численности доступ к питательной среде затрудняется, то темп роста численности бактерий замедляется[23]. Поэтому если мы хотим использовать модель более широко, то ее необходимо корректировать.

Когда мы хотим описать некое явление, мы переносим его из реального мира в мир математики, получаем там результат и, интерпретировав его, пытаемся объяснить явление. Если результат нас удовлетворяет, то на этом все заканчивается, в противном случае необходимо скорректировать построенную модель и снова провести вычисления и проверить результы. Таким образом, мы должны получать с каждым разом все более точные результаы. До какой степени точности нужно продолжать? Пока не будет полного понимания. Пройдя еще один круг моделирования, мы каждый раз улучшаем результат, и если он нас все еще не удовлетворяет, идем на новый круг.

Рассмотрим ситуацию с ростом численности населения. С ростом количества людей увеличивается и их влияние на условия жизни[24]. Когда условия жизни ухудшаются (жить становится сложнее), то и темп прироста снижается. Попробуем переписать коэффициент Мальтуса так, чтобы он снижался при росте численности населения. K здесь константа:

$$\mu\left(1-\frac{P}{K}\right).$$

Тогда дифференциальное уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\left(1-\frac{P}{K}\right)P \tag{3.4}$$

(скорректированное дифференциальное уравнение, описывающее рост численности населения).

Как же будет выглядеть кривая, полученная в результате решения этого дифференциального уравнения?

Попробуем преобразовать правую часть уравнения, чтобы вывести K в знаменатель.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{(K-P)P}{K}.$$

Может, это выглядит не очень понятно, но зато теперь можно применить метод разделения переменных:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{(K-P)P}{K}.$$

Вот что получится в итоге:

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{(K-P)P}=\frac{\mu}{K}\int\mathrm{d}t.$$

[23] Процесс роста численности состоит из нескольких фаз.

[24] Речь о проблемах окружающей среды.

Теперь хочется проинтегрировать обе части, но если с правой частью уравнения все понятно, то левая часть вызывает затруднения. Для таких случаев существует удобный метод. Преобразуем подынтегральную функцию в левой части:

$$\frac{1}{(K-P)P}=\frac{1}{K}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right).$$

Мы произвели действие, обратное сокращению. Это называется **разложение на простые дроби**.

$$\frac{1}{K}\left(\int\frac{1}{P}\mathrm{d}P+\int\frac{1}{K-P}\mathrm{d}P\right)=\mu\int\mathrm{d}t.$$

Теперь мы можем проинтегрировать каждый элемент как обычно. Во втором интеграле в скобках обозначим за $s = K - P$, тогда, исходя из того, что $\mathrm{d}s/\mathrm{d}P = -1$, получаем:

$$\int\frac{1}{K-P}\mathrm{d}P=\int\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\int\frac{1}{s}\mathrm{d}s=-\ln s=-\ln(K-P).$$

Это называется **интегрирование подстановкой**. Полная формула теперь выглядит так[25]:

$$\ln P - \ln(K - P) = \mu t + C.$$

Исходя из свойств логарифмов, получаем:

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)=\mu t+C.$$

Преобразуем в экспоненциальную функцию:

$$\frac{P}{K-P}=e^{\mu t+C}.$$

Теперь отсюда можем выразить P:

$$P(t)=\frac{Ke^{\mu t+C}}{1+e^{\mu t+C}} \qquad \leftarrow \text{Решение скорректированного дифференциального уравнения} \tag{3.5}$$

Это наша итоговая функция.

Если за P_0 обозначим численность населения в момент времени $t = 0$, то:

$$P_0=\frac{Ke^C}{1+e^C},$$

то есть:

$$e^c=\frac{P_0}{K-P_0}.$$

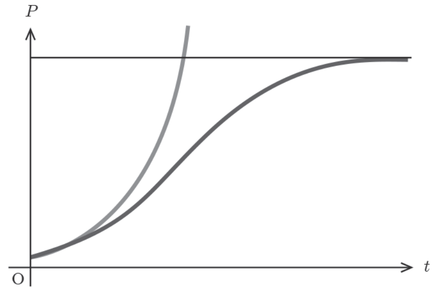
[25] P и $(K - P)$ – положительные значения.

Если подставить это в формулу (3.5), получим:

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{\mu t}}{K + P_0(e^{\mu t} - 1)}. \qquad (3.6)$$

Полученное решение довольно сложное. Но тут есть хитрость, нужно рассмотреть крайние значения. Например, если в формуле (3.6) подставить $t = 0$, то получим $P(0) = P_0$. Это понятно, так как это и есть начальное состояние. Теперь попробуем подставить предельное значение $t \to \infty$. Для наглядности умножим числитель и знаменатель в правой части формулы (3.6) на $e^{-\mu t}$:

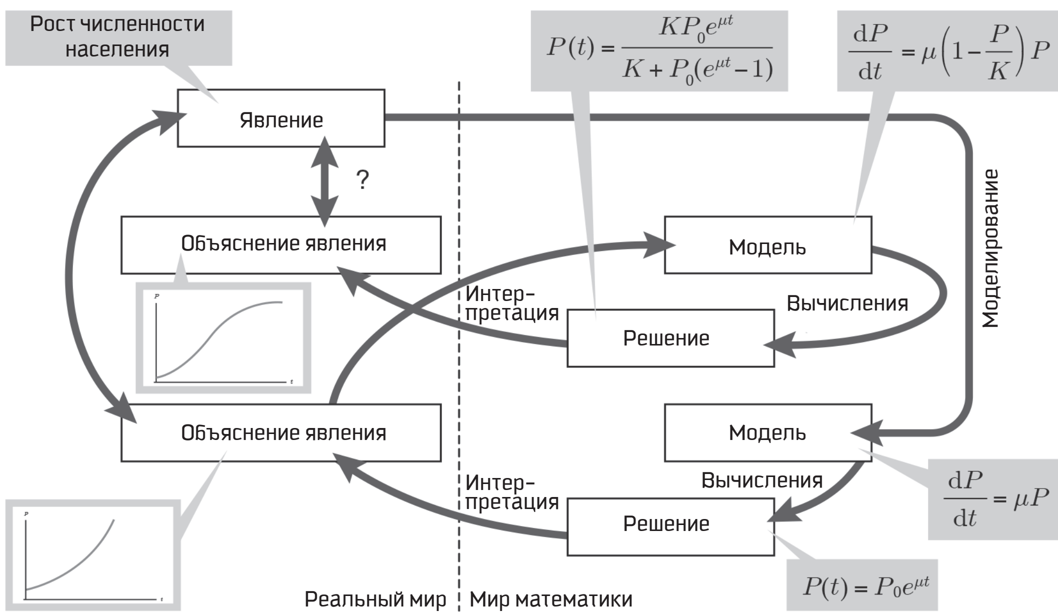
$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-\mu t} + P_0}, \qquad (3.7)$$



В первоначальной модели рост происходил по экспоненте (бледная линия), в скорректированной – темп роста замедляется, и кривая стремится к константе

Кривая решения скорректированной модели роста численности населения

то есть при $t \to \infty$ получается, что $P_\infty = K$. Другими словами, получаем кривую, которая из точки $P(0) = P_0$ возрастает, а потом начинает стремиться к K. Попробуем ее изобразить.



Дважды пройдя цикл моделирования, получили нужный результат

Скорректированная модель роста численности населения

Такая модель называется логистической. Она хорошо описывает не только рост численности населения, но и распространение производственных товаров.

В этой главе мы рассмотрели метод разделения переменных для решения дифференциальных уравнений. Давайте обобщим.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = F(x)G(y). \tag{3.8}$$

В правой части уравнения находится произведение двух фукций от разных переменных: $F(x)$ и $G(y)$. В уравнениях такого вида мы можем разделить переменные x и y по разным сторонам уравнения, этот способ решения называется **методом разделения переменных**.

Делим обе части уравнения (3.8) на $G(y)$:

$$\frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x).$$

Интегрируем обе части по x:

$$\int \frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int F(x)\mathrm{d}x + C.$$

В правой части осуществляем интегрирование подстановкой:

$$\int \frac{1}{G(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y.$$

Обозначив за C интегральную константу, в результате получаем:

$$\int \frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y = \int F(x)\mathrm{d}x + C. \tag{3.9}$$

Теперь в левой части у нас переменная y, дифференциал y и фукция $G(y)$ только от переменной y, в правой же части имеем переменную x, дифференциал x и функцию $F(x)$ только от переменной x. Таким образом, мы разнесли переменные по разным частям уравнения. Теперь остается только проинтегрировать обе части. Возможно, решить такое уравнение будет не просто, но с помощью компьютера это возможно. Поэтому если удалось привести уравнение к виду (3.9), то можно считать, что задача решена[26].

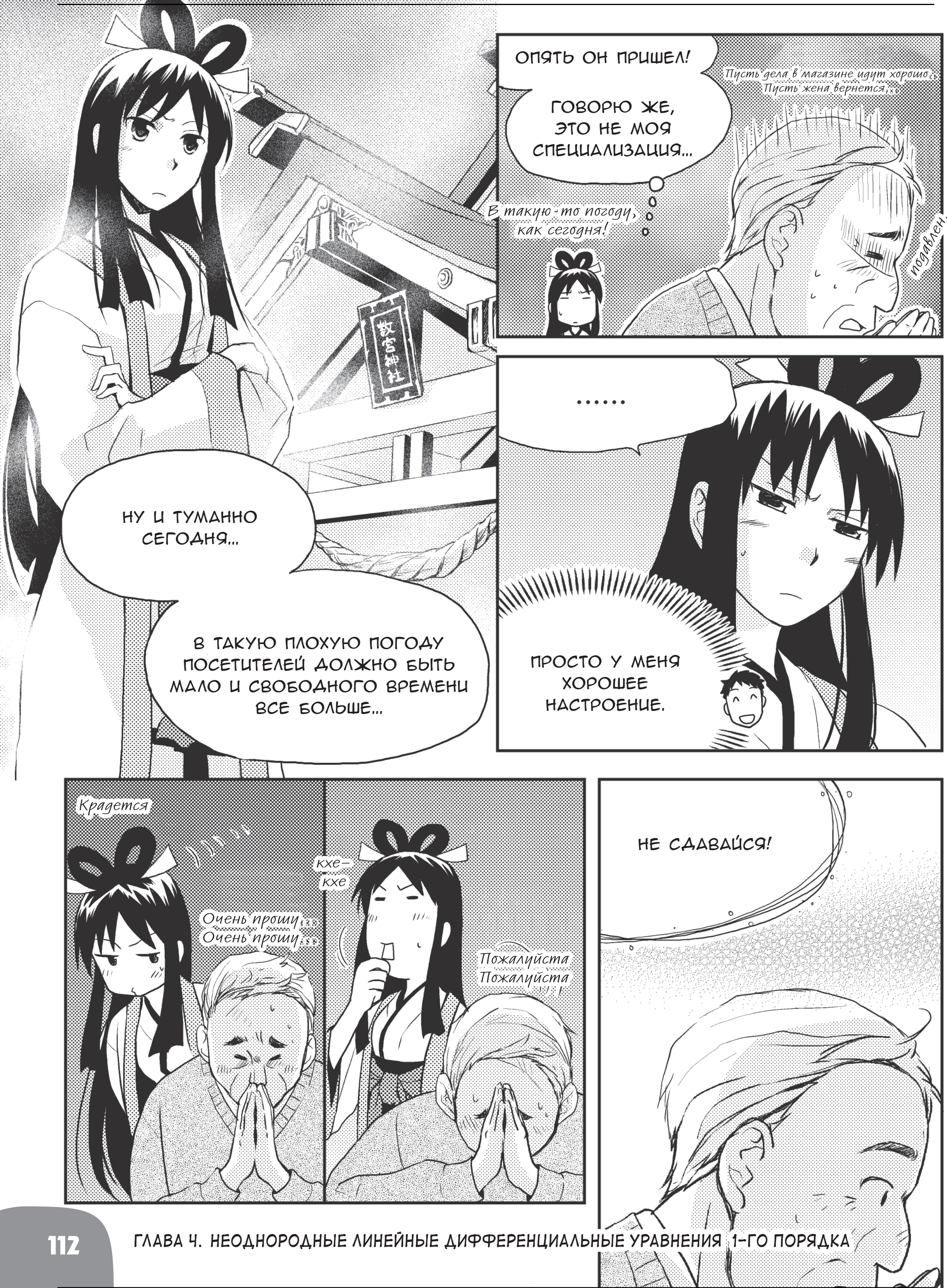
Метод разделения переменных является базовым при решении дифференциальных уравнений, так как если в уравнении можно разделить пемененные, это означает, что его можно решить. Иногда с первого взгляда не понятно, можно ли использовать метод разделения переменных, в этом случае можно попробовать осуществить замену переменных. Это может быть очень интересно – решать такие уравнения с самого начала, подобно складыванию пазла, но все-таки прежде всего лучше изучить опыт предшественников.

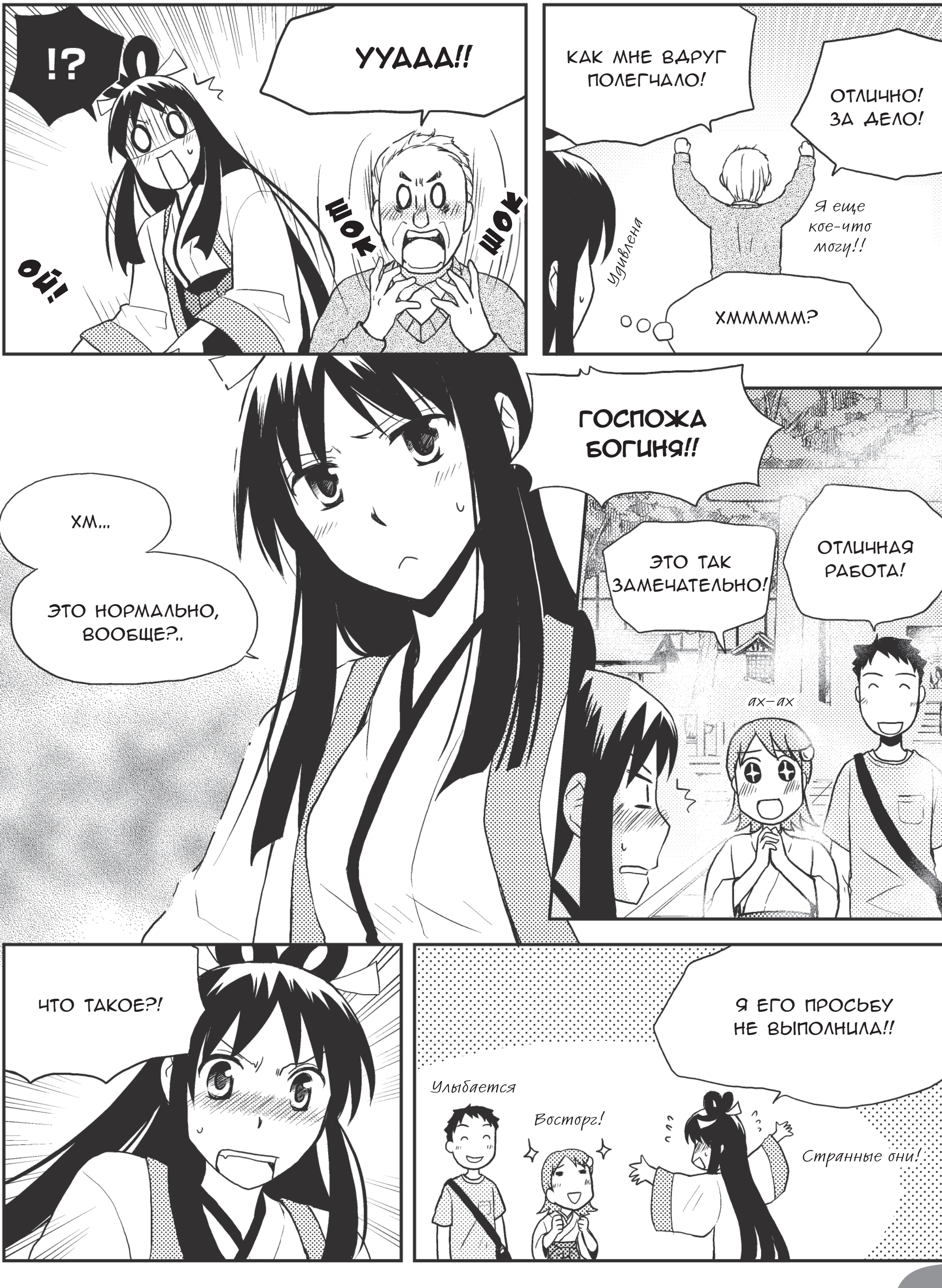
[26] Иногда достаточно только привести уравнение к виду (3.9).

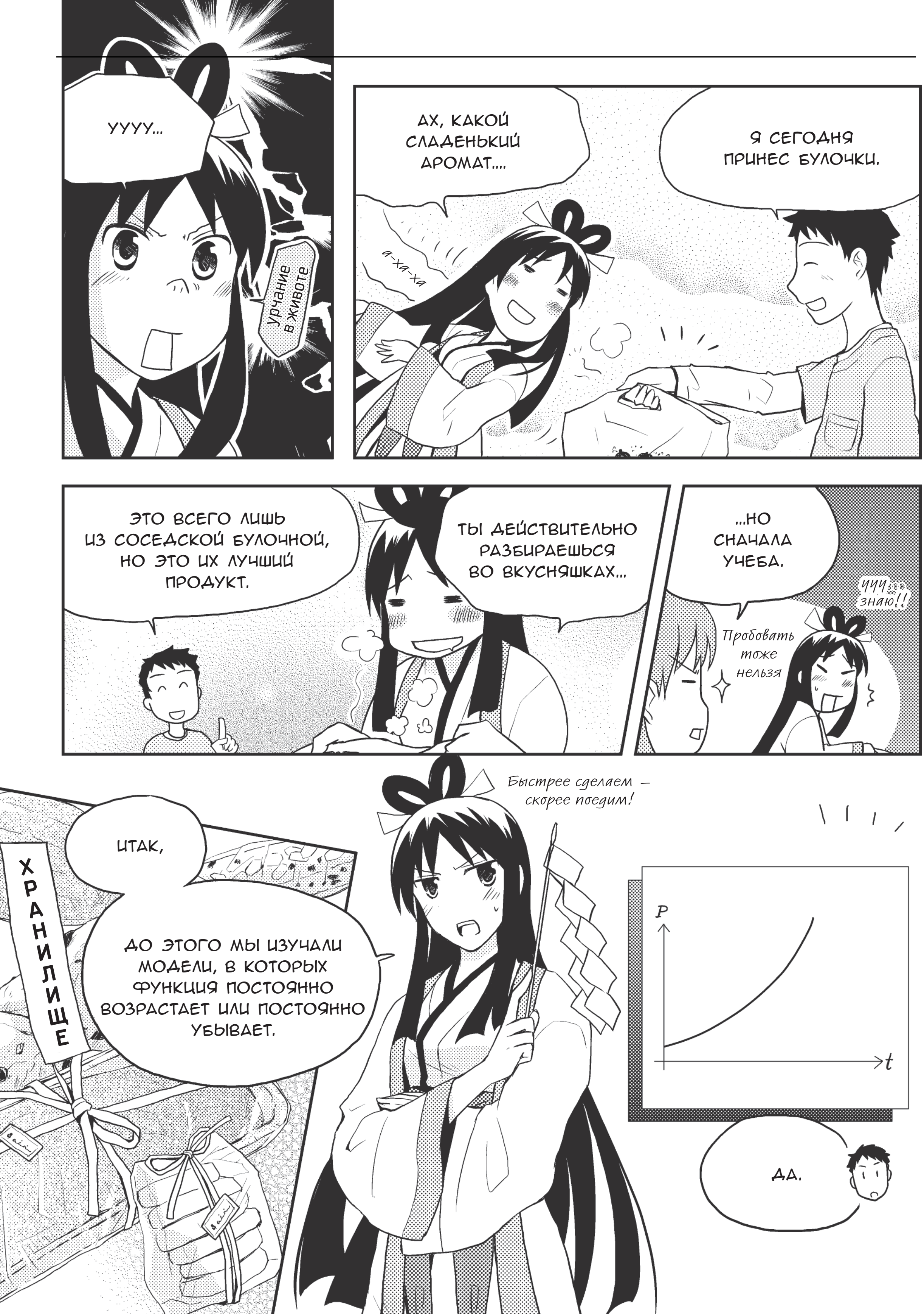
ГЛАВА 4

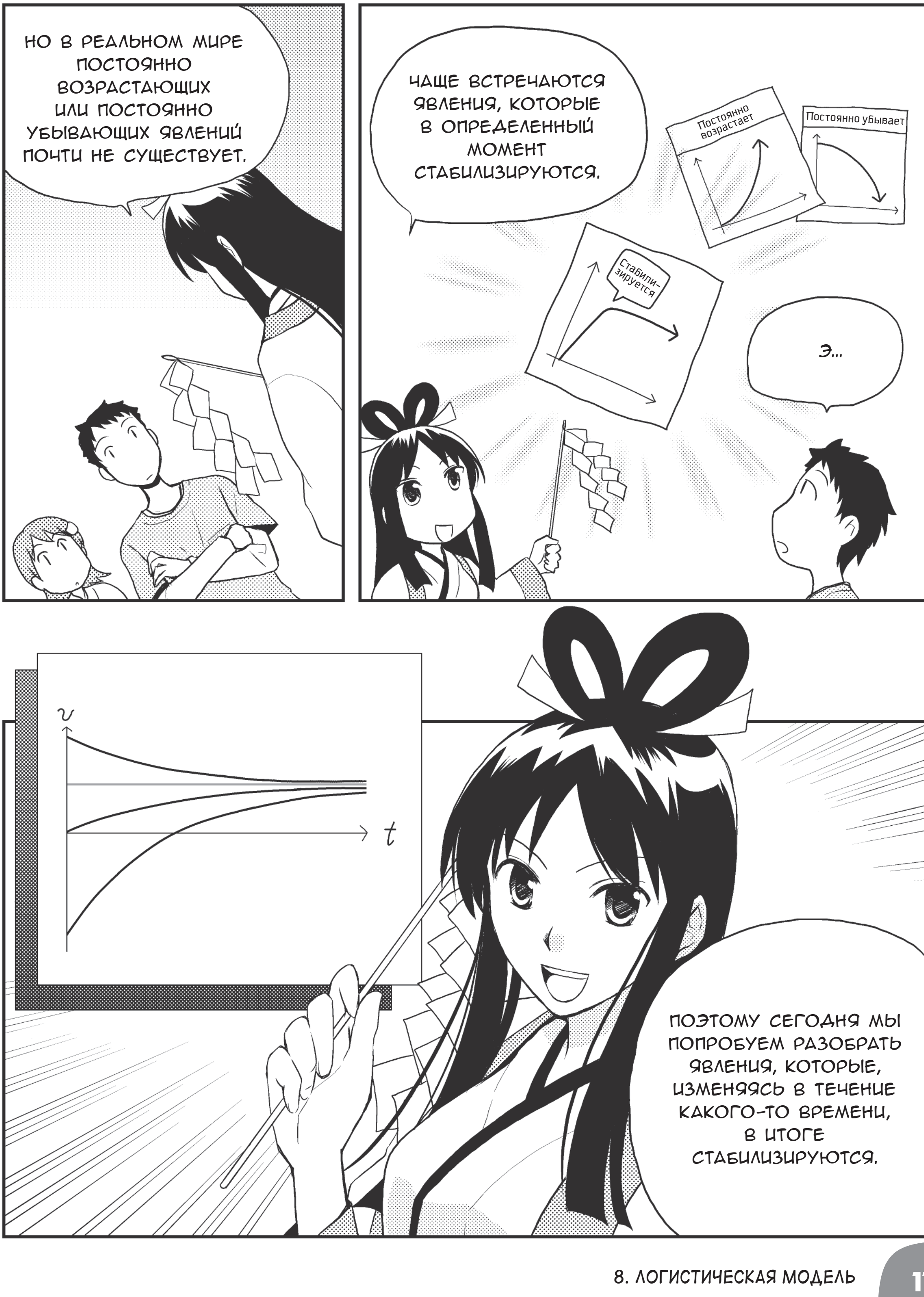
НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

ПАДАЮЩИЕ ОБЛАКА


Ну и туманно сегодня...
В такую плохую погоду посетителей должно быть мало и свободного времени все больше...
Опять он пришел!
Говорю же, это не моя специализация...
Пусть дела в магазине идут хорошо, Пусть жена вернется...
В такую-то погоду, как сегодня!
подавлен...
......
Просто у меня хорошее настроение.
Крадется
Очень прошу... Очень прошу...
кхе-кхе
Пожалуйста Пожалуйста
Не сдавайся!

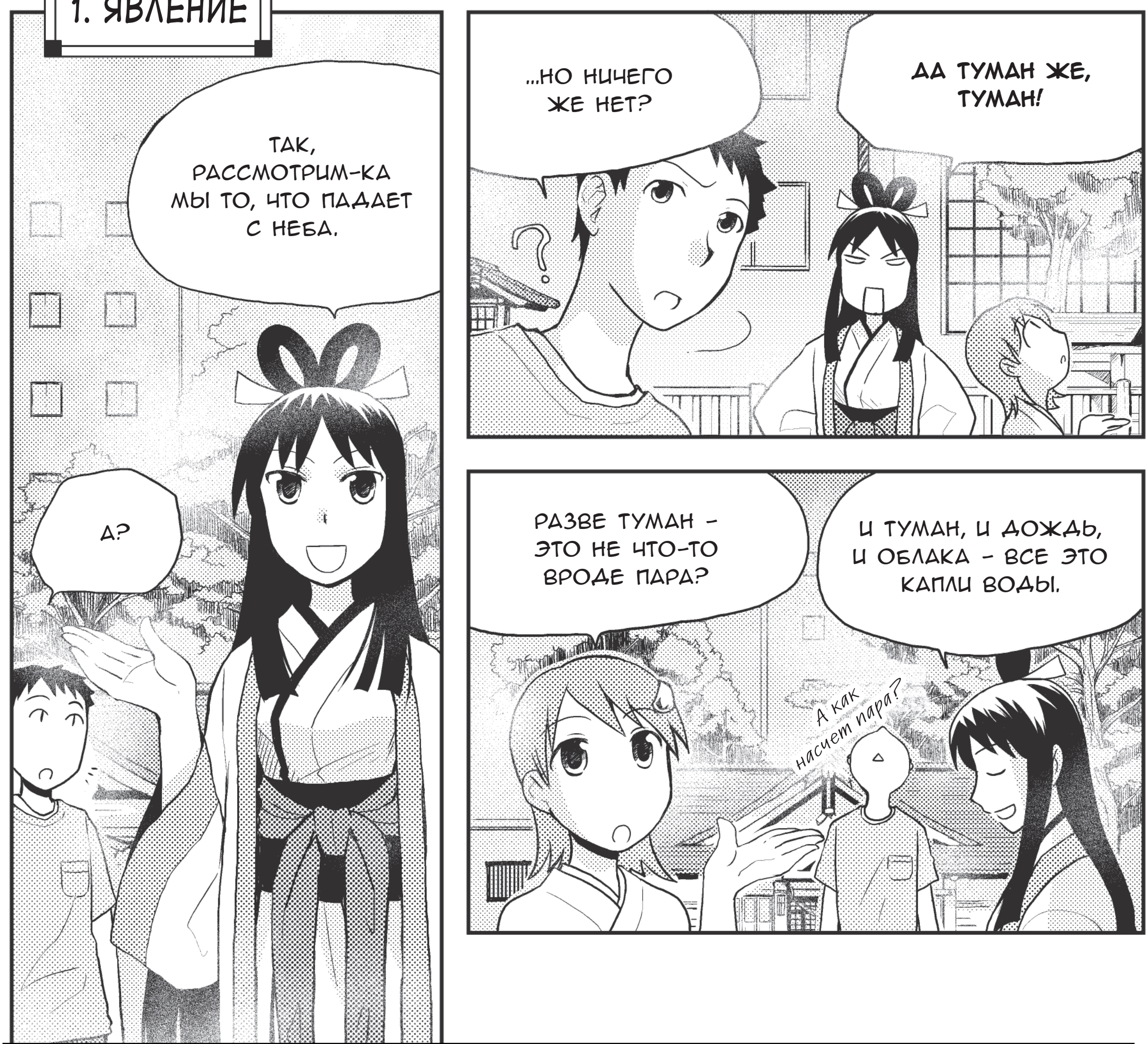

!?
УУААА!!
ОЙ!
ШОК
ШОК
КАК МНЕ ВДРУГ ПОЛЕГЧАЛО!
ОТЛИЧНО! ЗА ДЕЛО!
Я еще кое-что могу!!
Удивлена
ХММММ?
ГОСПОЖА БОГИНЯ!!
ХМ...
ЭТО НОРМАЛЬНО, ВООБЩЕ?..
ЭТО ТАК ЗАМЕЧАТЕЛЬНО!
ОТЛИЧНАЯ РАБОТА!
ах-ах
ЧТО ТАКОЕ?!
Я ЕГО ПРОСЬБУ НЕ ВЫПОЛНИЛА!!
Улыбается
Восторг!
Странные они!

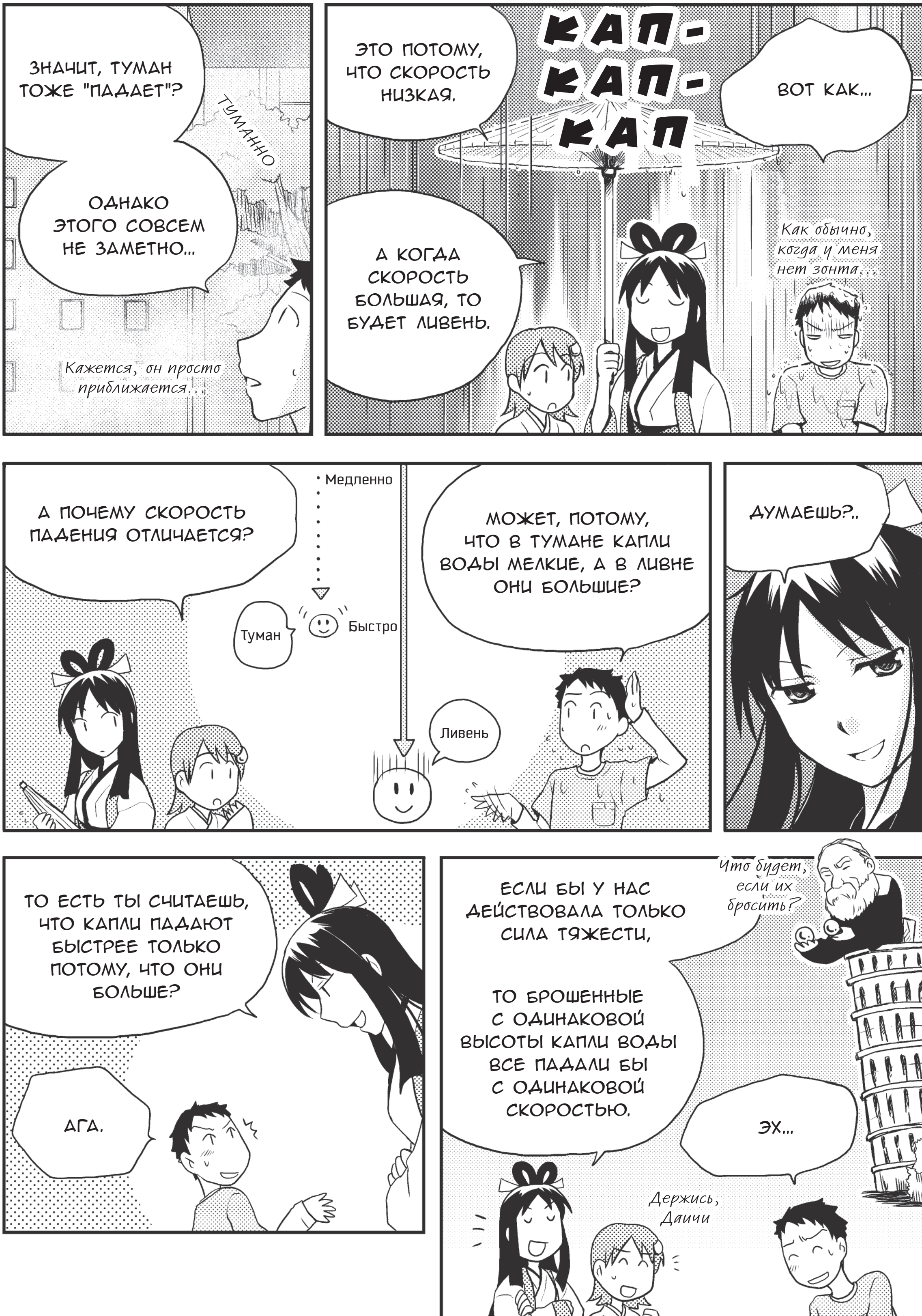

УУУУ...
урчание в животе
Ах, какой сладенький аромат....
а-ха-ха
Я сегодня принес булочки.
Это всего лишь из соседской булочной, но это их лучший продукт.
Ты действительно разбираешься во вкусняшках...
...Но сначала учеба.
Пробовать тоже нельзя
ууу... знаю!!
Итак,
Хранилище
Быстрее сделаем – скорее поедим!
До этого мы изучали модели, в которых функция постоянно возрастает или постоянно убывает.
P
t
Да.


НО В РЕАЛЬНОМ МИРЕ ПОСТОЯННО ВОЗРАСТАЮЩИХ ИЛИ ПОСТОЯННО УБЫВАЮЩИХ ЯВЛЕНИЙ ПОЧТИ НЕ СУЩЕСТВУЕТ.
ЧАЩЕ ВСТРЕЧАЮТСЯ ЯВЛЕНИЯ, КОТОРЫЕ В ОПРЕДЕЛЕННЫЙ МОМЕНТ СТАБИЛИЗИРУЮТСЯ.
Постоянно возрастает
Постоянно убывает
Стабили-зируется
Э...
v
t
ПОЭТОМУ СЕГОДНЯ МЫ ПОПРОБУЕМ РАЗОБРАТЬ ЯВЛЕНИЯ, КОТОРЫЕ, ИЗМЕНЯЯСЬ В ТЕЧЕНИЕ КАКОГО-ТО ВРЕМЕНИ, В ИТОГЕ СТАБИЛИЗИРУЮТСЯ.


По сравнению с методом разделения переменных в решении дифференциальных уравнений...
Даиии
Метод разделения переменных
Мы переходим к объяснению более сложных явлений.
Даиии
Понял!
Метод разделения переменных

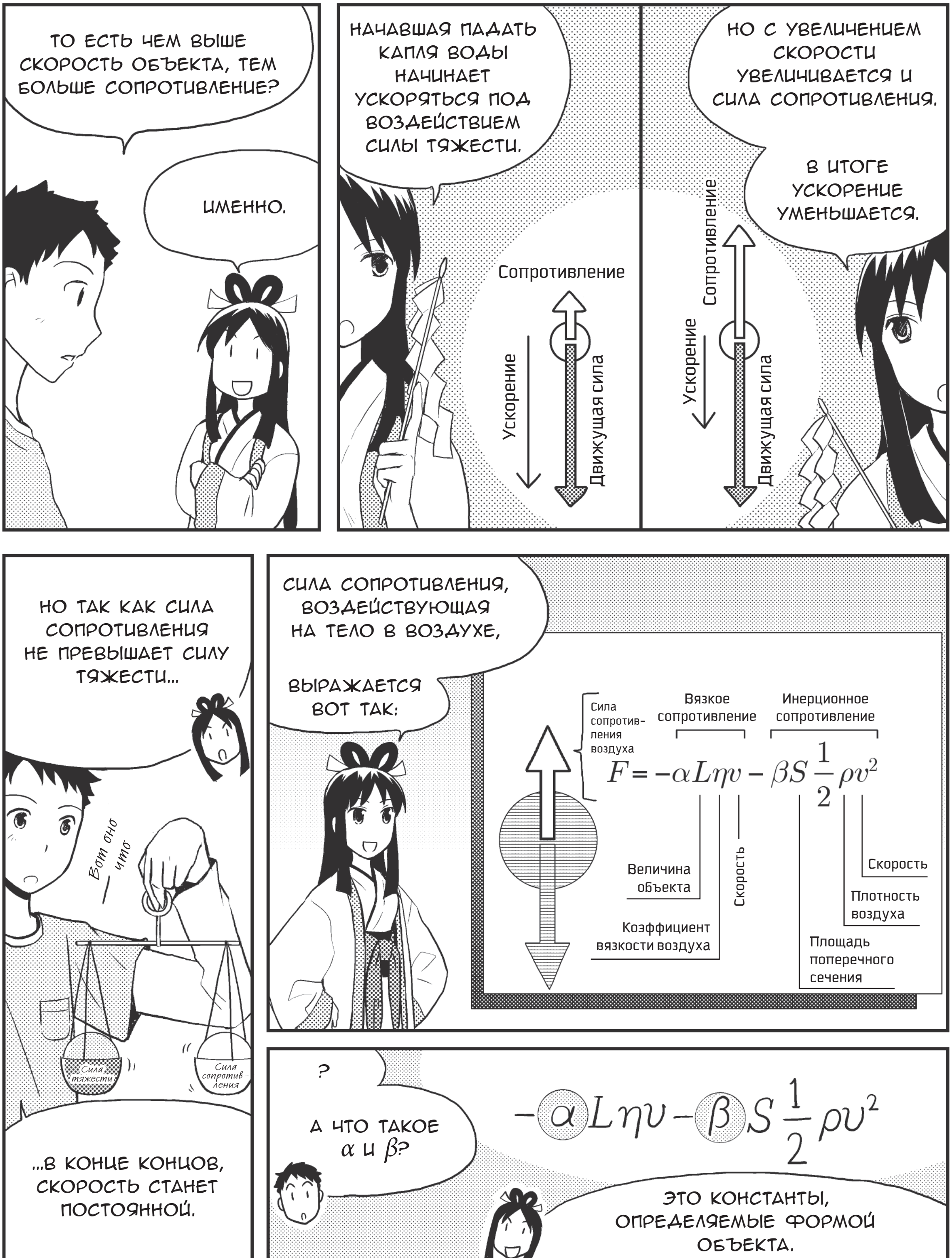
1. Явление


Так, рассмотрим-ка мы то, что падает с неба.
А?
...Но ничего же нет?
Да туман же, туман!
Разве туман – это не что-то вроде пара?
И туман, и дождь, и облака – все это капли воды.
А как насчет пара?

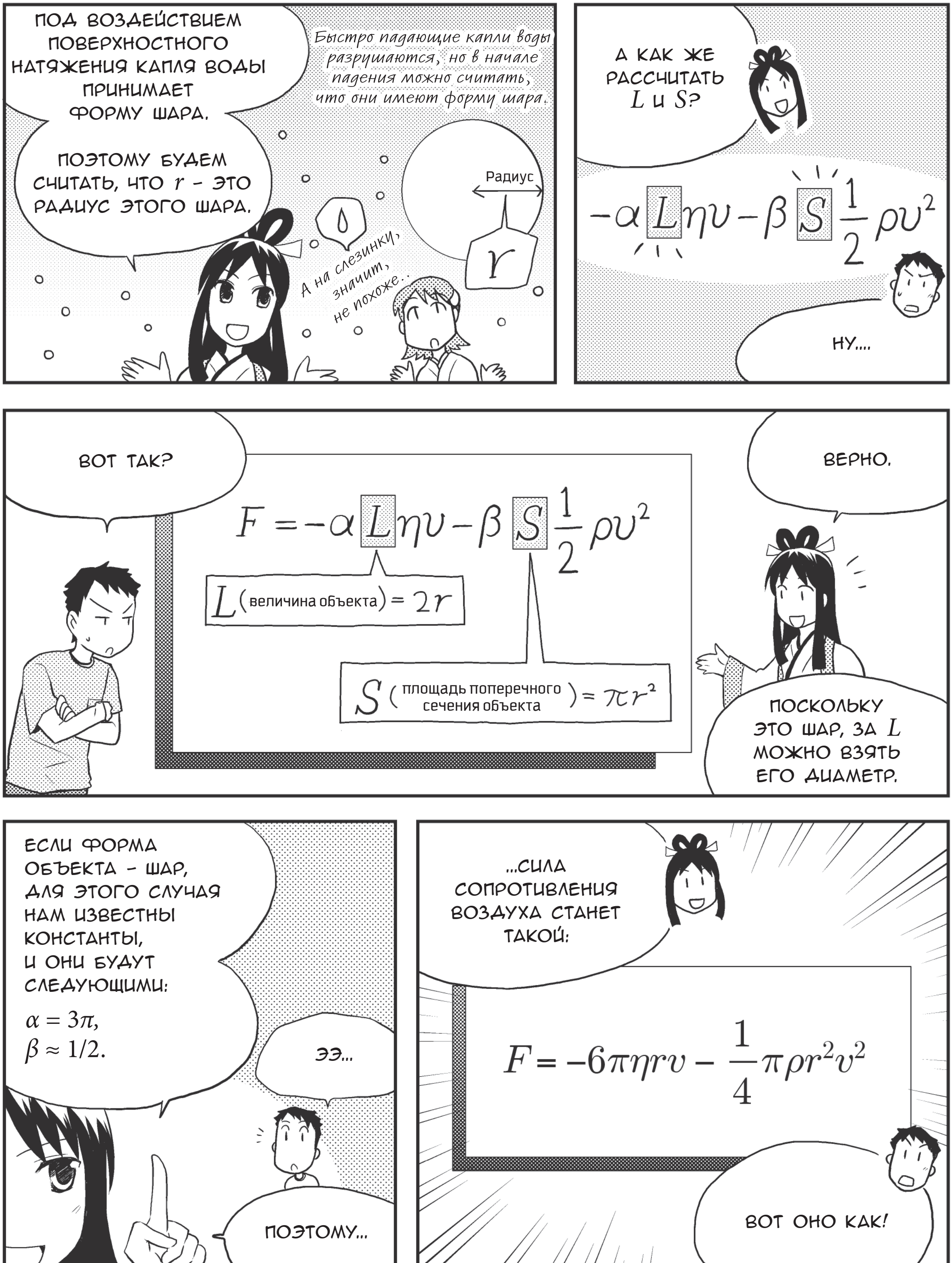


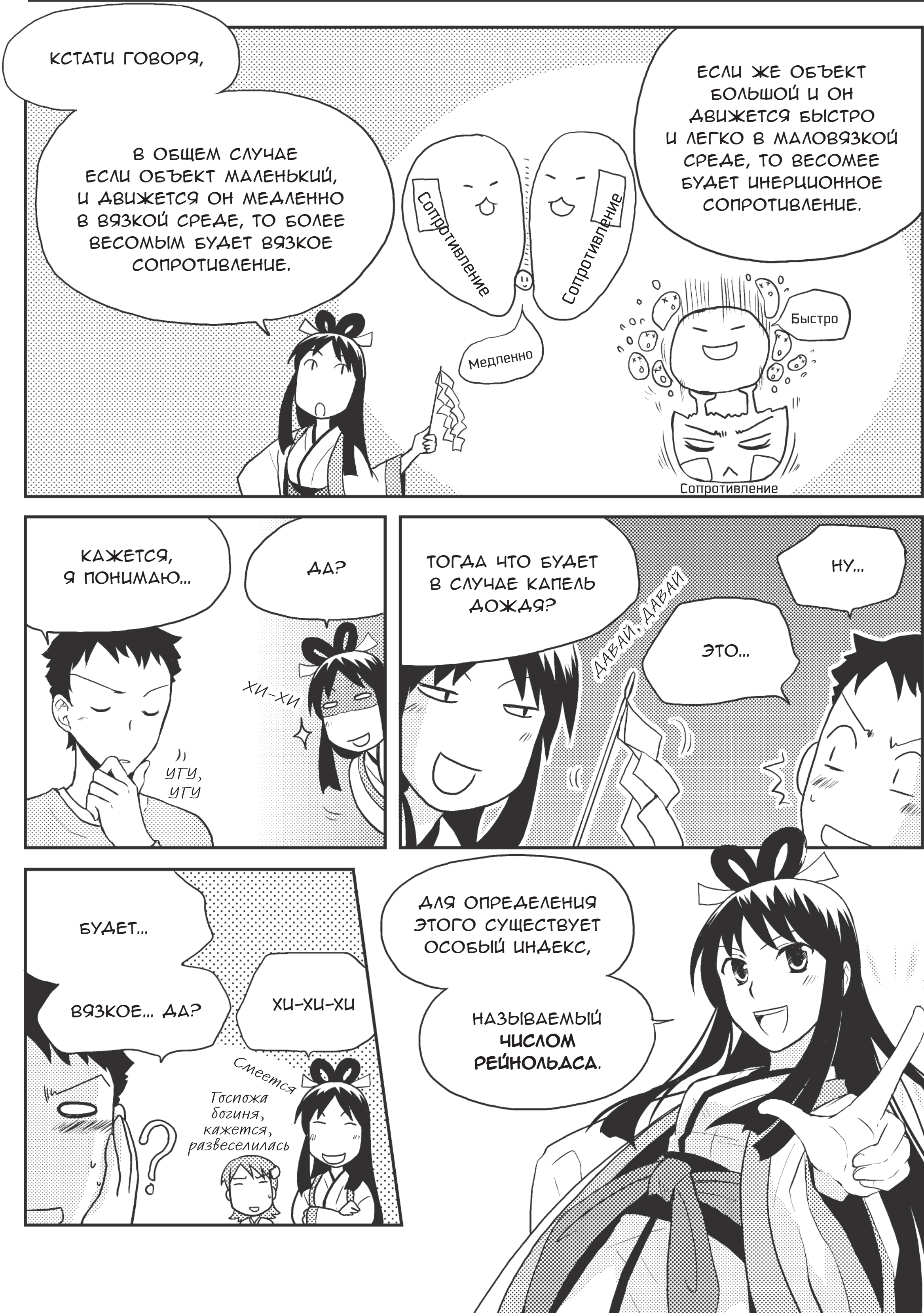
Значит, туман тоже "падает"?
Туманно
Однако этого совсем не заметно...
Кажется, он просто приближается...
Это потому, что скорость низкая.
Кап-кап-кап
Вот как...
А когда скорость большая, то будет ливень.
Как обычно, когда у меня нет зонта...
А почему скорость падения отличается?
Медленно
Туман
Быстро
Ливень
Может, потому, что в тумане капли воды мелкие, а в ливне они большие?
Думаешь?..
То есть ты считаешь, что капли падают быстрее только потому, что они больше?
Ага.
Если бы у нас действовала только сила тяжести,
Что будет, если их бросить?
то брошенные с одинаковой высоты капли воды все падали бы с одинаковой скоростью.
Эх...
Держись, Даичи

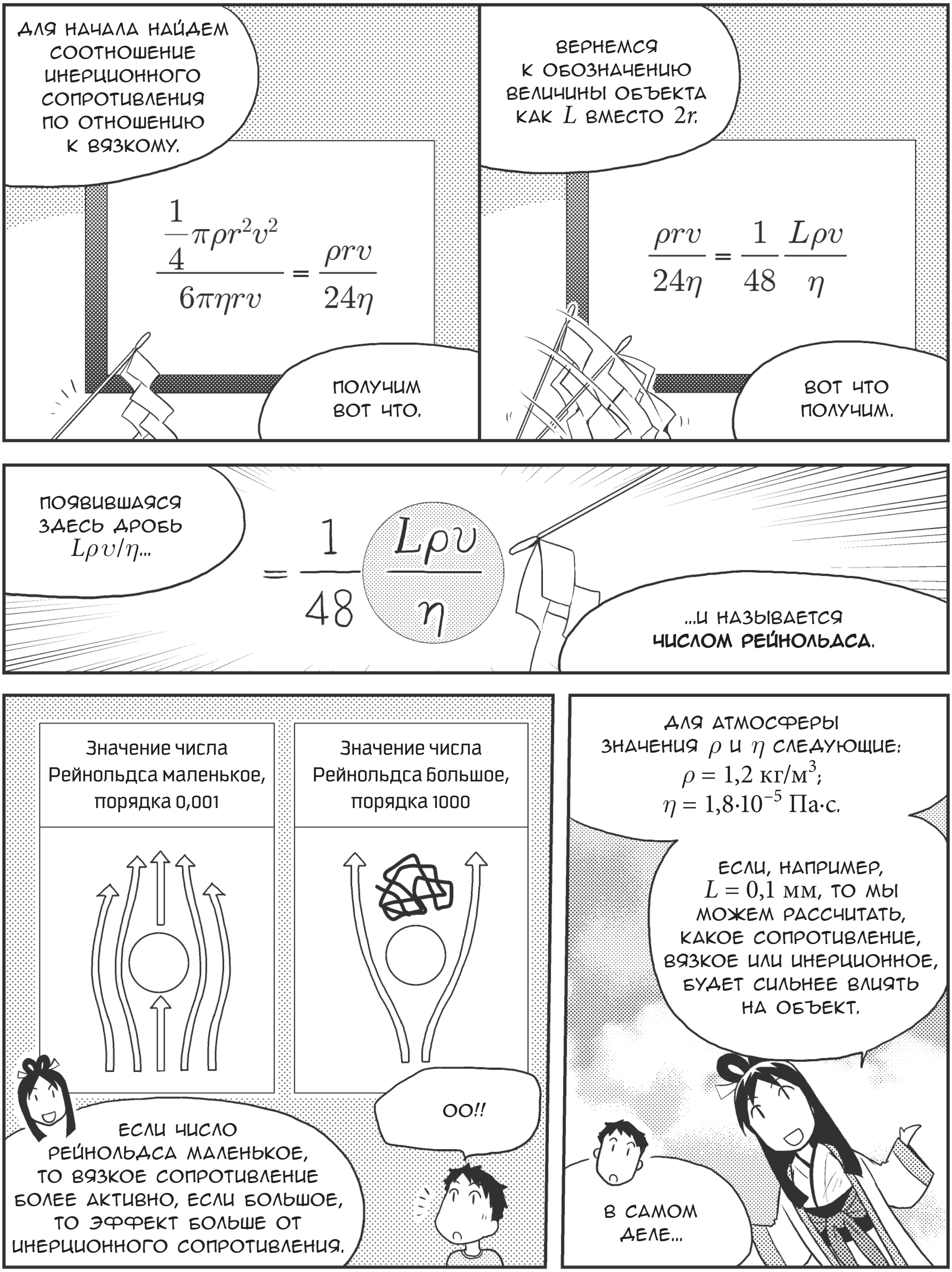
ПОНЯЛ!
СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА!
ВЕРНО. ПАДАЮЩИЕ В ВОЗДУХЕ КАПЛИ ВОДЫ ИСПЫТЫВАЮТ НА СЕБЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА.
СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА БЫВАЕТ ДВУХ ВИДОВ.
СОПРОТИВЛЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ, КОГДА ДВИЖУЩИЙСЯ ОБЪЕКТ РАССЕКАЕТ ВОЗДУХ, НАЗЫВАЕТСЯ **ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**.
Вязкое сопротивление (рассечение)
Воздух
Воздух
Инерционное сопротивление (сталкивание)
Воздух
СОПРОТИВЛЕНИЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ, КОГДА ПОВЕРХНОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА СТАЛКИВАЕТСЯ С ВОЗДУХОМ, НАЗЫВАЕТСЯ **ИНЕРЦИОННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**.
В СОВОКУПНОСТИ ОНИ ОБРАЗУЮТ СОПРОТИВЛЕНИЕ, ЗАТРУДНЯЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА.
Скорость
Сопро-тивление
Объект
Движущая сила
КСТАТИ, ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО СКОРОСТИ ТЕЛА, А ИНЕРЦИОННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО КВАДРАТУ СКОРОСТИ.
АГА, АГА.



То есть чем выше скорость объекта, тем больше сопротивление?
Именно.
Начавшая падать капля воды начинает ускоряться под воздействием силы тяжести.
Сопротивление
Ускорение
Движущая сила
Но с увеличением скорости увеличивается и сила сопротивления.
В итоге ускорение уменьшается.
Сопротивление
Ускорение
Движущая сила
Но так как сила сопротивления не превышает силу тяжести...
Вот оно что
Сила тяжести
Сила сопротив-ления
...в конце концов, скорость станет постоянной.
Сила сопротивления, воздействующая на тело в воздухе,
выражается вот так:
Сила сопротив-ления воздуха
Вязкое сопротивление
Инерционное сопротивление
$F = -\alpha L\eta v - \beta S \frac{1}{2}\rho v^2$
Величина объекта
Коэффициент вязкости воздуха
Скорость
Площадь поперечного сечения
Плотность воздуха
Скорость
?
А что такое α и β?
$-\alpha L\eta v - \beta S \frac{1}{2}\rho v^2$
Это константы, определяемые формой объекта.


Под воздействием поверхностного натяжения капля воды принимает форму шара.
Быстро падающие капли воды разрушаются, но в начале падения можно считать, что они имеют форму шара.
Поэтому будем считать, что r – это радиус этого шара.
Радиус
r
А на слезинку, значит, не похоже..
А как же рассчитать L и S?
$-\alpha \boxed{L} \eta v - \beta \boxed{S} \frac{1}{2} \rho v^2$
Ну....
Вот так?
$F = -\alpha \boxed{L} \eta v - \beta \boxed{S} \frac{1}{2} \rho v^2$
L (величина объекта) $= 2r$
S (площадь поперечного сечения объекта) $= \pi r^2$
Верно.
Поскольку это шар, за L можно взять его диаметр.
Если форма объекта – шар, для этого случая нам известны константы, и они будут следующими:
$\alpha = 3\pi$,
$\beta \approx 1/2$.
Ээ...
Поэтому...
...сила сопротивления воздуха станет такой:
$F = -6\pi\eta r v - \frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2$
Вот оно как!


Кстати говоря,
в общем случае если объект маленький, и движется он медленно в вязкой среде, то более весомым будет вязкое сопротивление.
Сопротивление
Сопротивление
Медленно
Если же объект большой и он движется быстро и легко в маловязкой среде, то весомее будет инерционное сопротивление.
Быстро
Сопротивление
Кажется, я понимаю...
Да?
Хи-хи
Угу, угу
Тогда что будет в случае капель дождя?
Давай, давай
Ну...
Это...
Будет...
вязкое... да?
Хи-хи-хи
Смеется
Госпожа богиня, кажется, развеселилась
Для определения этого существует особый индекс,
называемый **числом Рейнольдса**.

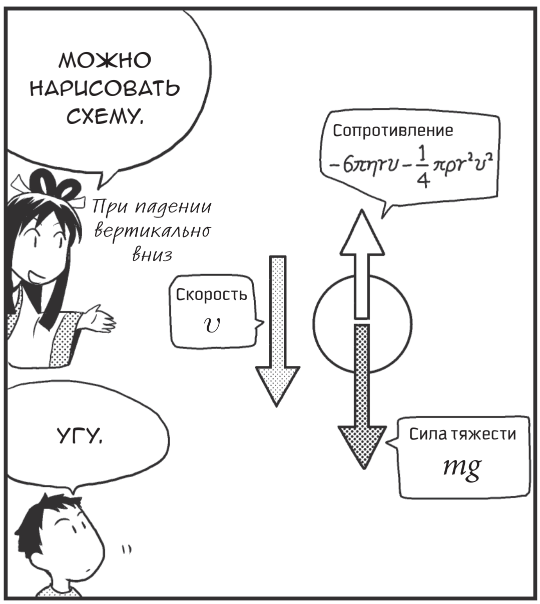

ДЛЯ НАЧАЛА НАЙДЕМ СООТНОШЕНИЕ ИНЕРЦИОННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВЯЗКОМУ.
$$\frac{\frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2}{6\pi\eta r v} = \frac{\rho r v}{24\eta}$$
ПОЛУЧИМ ВОТ ЧТО.
ВЕРНЕМСЯ К ОБОЗНАЧЕНИЮ ВЕЛИЧИНЫ ОБЪЕКТА КАК L ВМЕСТО $2r$.
$$\frac{\rho r v}{24\eta} = \frac{1}{48}\frac{L\rho v}{\eta}$$
ВОТ ЧТО ПОЛУЧИМ.
ПОЯВИВШАЯСЯ ЗДЕСЬ ДРОБЬ $L\rho v/\eta$...
$$= \frac{1}{48}\frac{L\rho v}{\eta}$$
...И НАЗЫВАЕТСЯ **ЧИСЛОМ РЕЙНОЛЬДСА**.
Значение числа Рейнольдса маленькое, порядка 0,001
Значение числа Рейнольдса большое, порядка 1000
ЕСЛИ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА МАЛЕНЬКОЕ, ТО ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БОЛЕЕ АКТИВНО, ЕСЛИ БОЛЬШОЕ, ТО ЭФФЕКТ БОЛЬШЕ ОТ ИНЕРЦИОННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ.
ОО!!
ДЛЯ АТМОСФЕРЫ ЗНАЧЕНИЯ ρ И η СЛЕДУЮЩИЕ: $\rho = 1{,}2$ кг/м^3; $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Па·с.
ЕСЛИ, НАПРИМЕР, $L = 0{,}1$ мм, ТО МЫ МОЖЕМ РАССЧИТАТЬ, КАКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, ВЯЗКОЕ ИЛИ ИНЕРЦИОННОЕ, БУДЕТ СИЛЬНЕЕ ВЛИЯТЬ НА ОБЪЕКТ.
В САМОМ ДЕЛЕ...

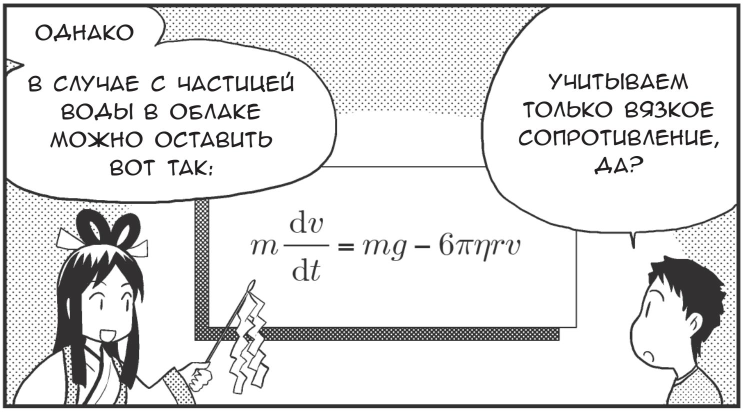
	Радиус
Дождевая капля	1000 мкм* (= 1 мм)
Частица воды в облаке	10 мкм (= 0,01 мм)

* 1 мкм = 10^{-6} м.

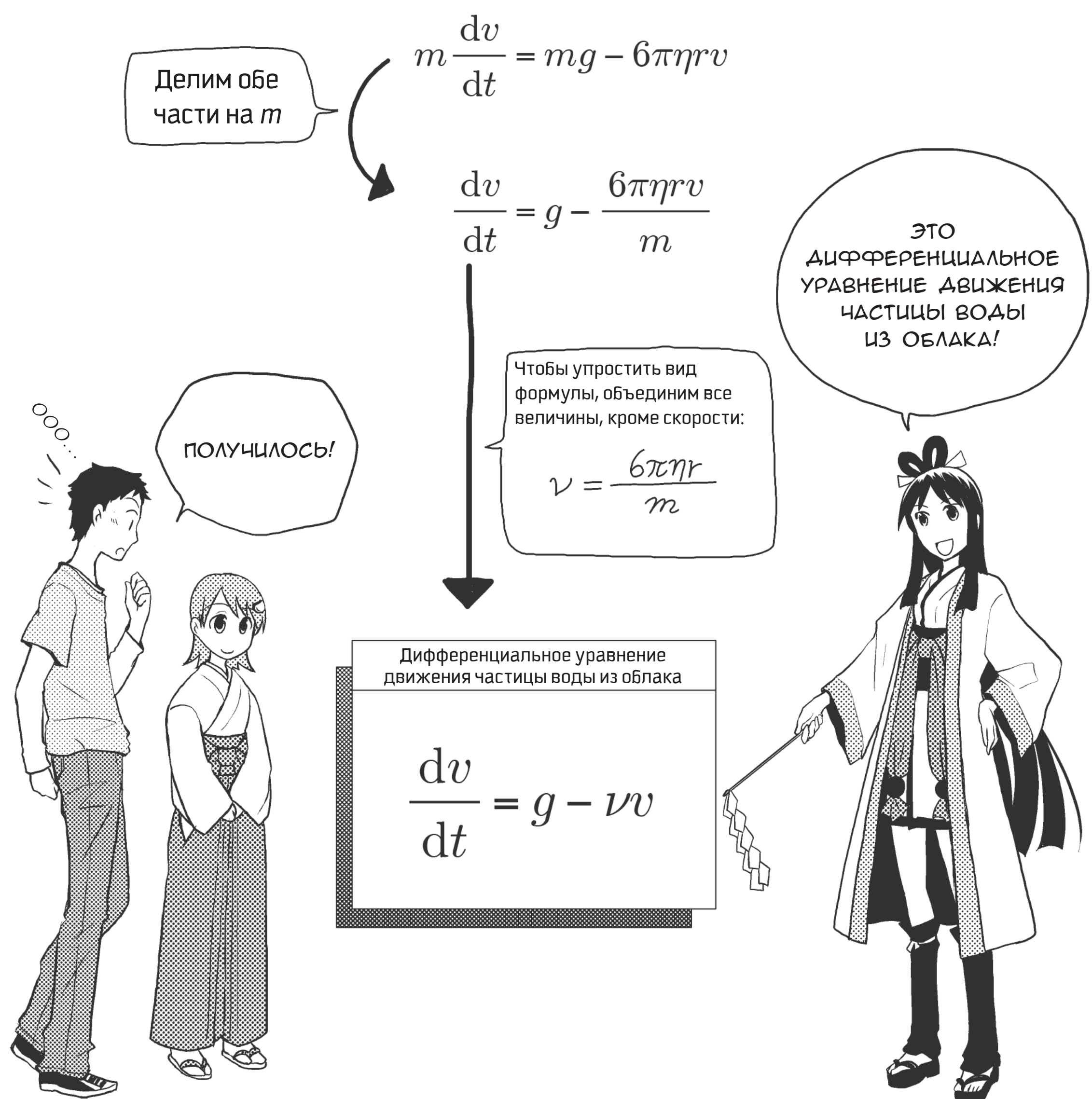
2. МОДЕЛЬ

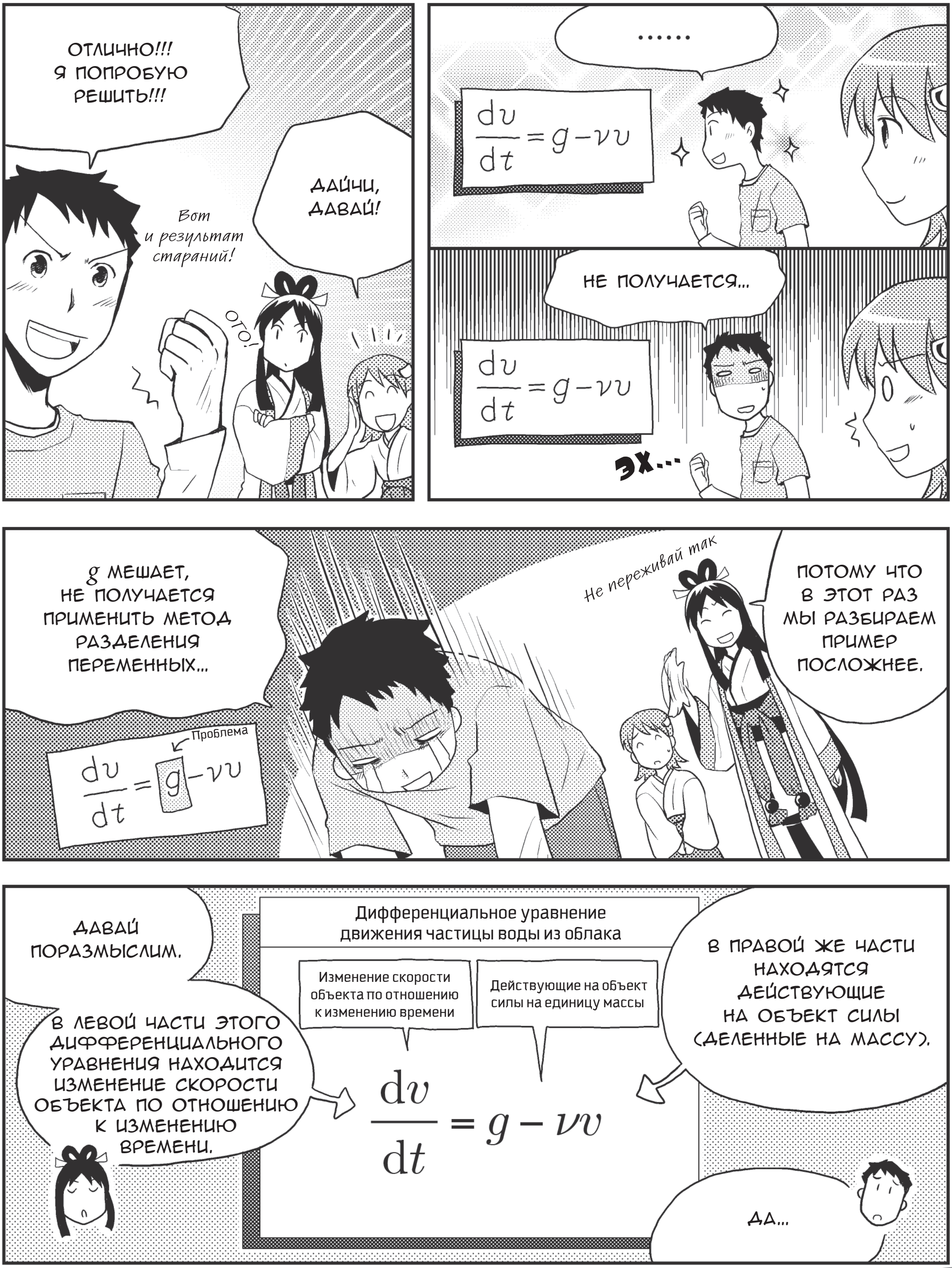
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - 6\pi\eta r v - \frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2$$

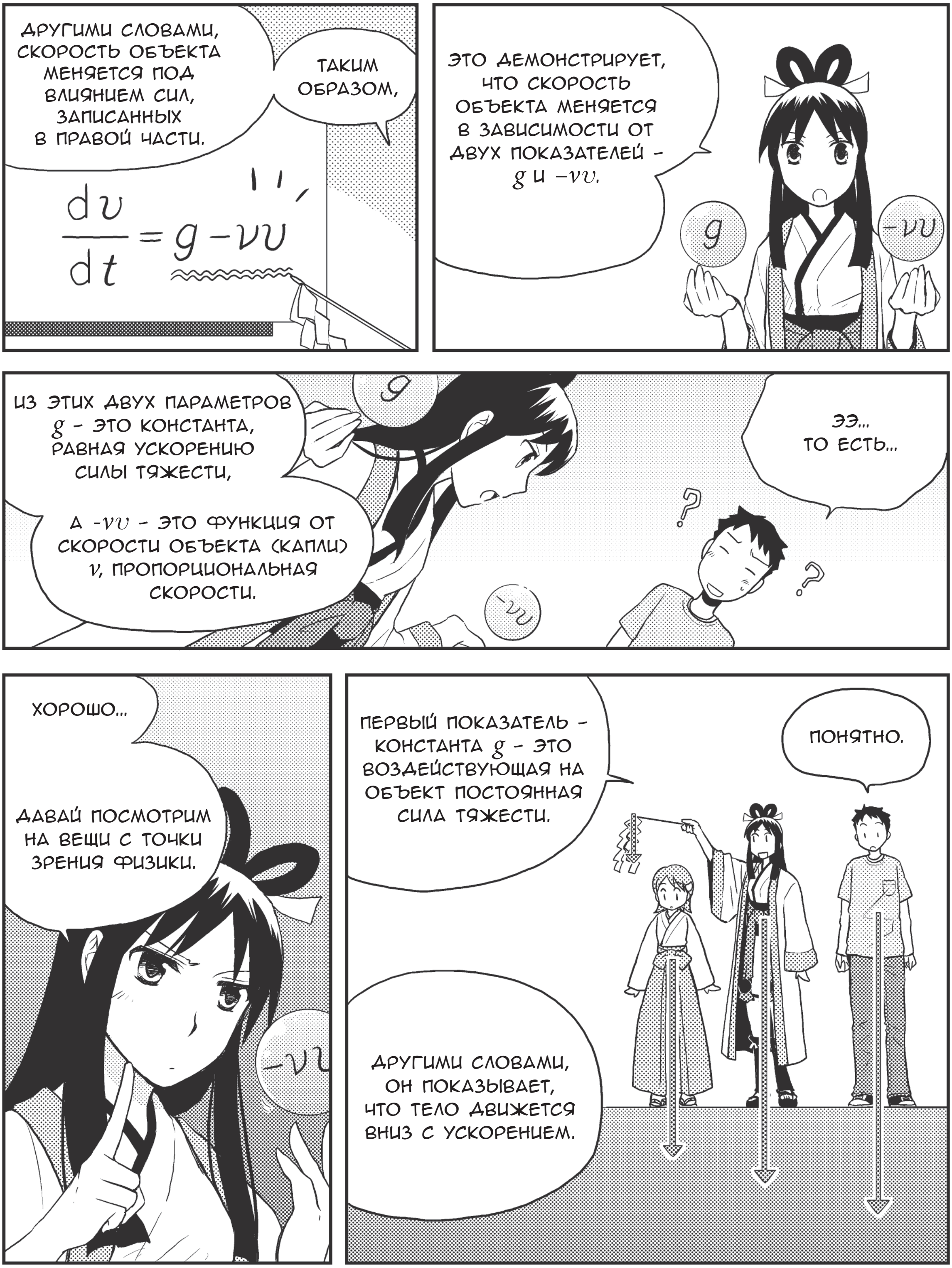


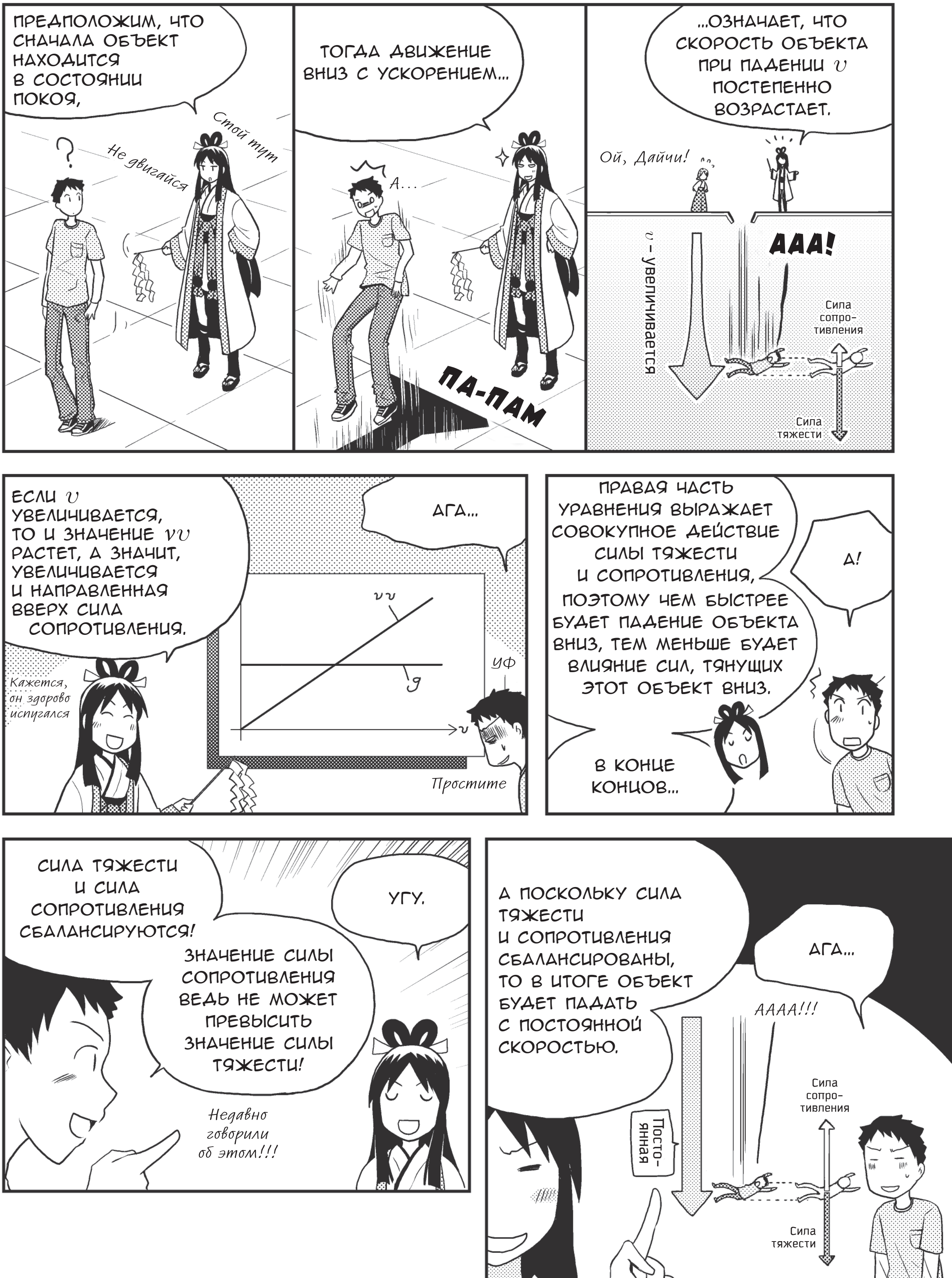

ОДНАКО
В СЛУЧАЕ С ЧАСТИЦЕЙ ВОДЫ В ОБЛАКЕ МОЖНО ОСТАВИТЬ ВОТ ТАК:
$m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v$
УЧИТЫВАЕМ ТОЛЬКО ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, ДА?

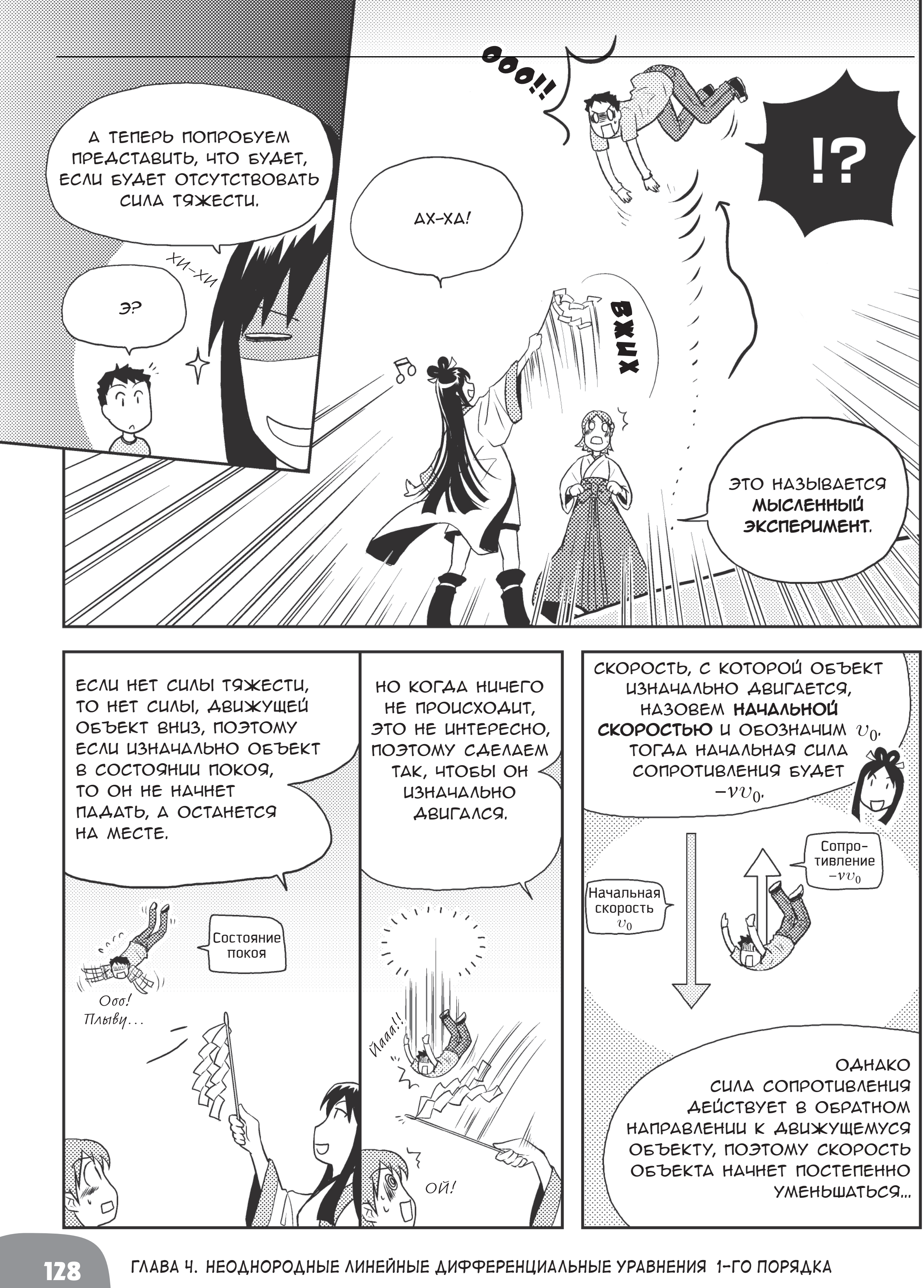

А ТЕПЕРЬ ПРЕОБРАЗУЕМ...


$m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v$
Делим обе части на m
$\frac{dv}{dt} = g - \frac{6\pi\eta r v}{m}$
ЭТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ВОДЫ ИЗ ОБЛАКА!
Чтобы упростить вид формулы, объединим все величины, кроме скорости:
$\nu = \frac{6\pi\eta r}{m}$
ООО...
ПОЛУЧИЛОСЬ!
Дифференциальное уравнение движения частицы воды из облака
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$


ОТЛИЧНО!!! Я ПОПРОБУЮ РЕШИТЬ!!!
Вот и результат стараний!
ДАЙЧИ, ДАВАЙ!
ОГО!
......
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ...
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
ЭХ...
g МЕШАЕТ, НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ ПРИМЕНИТЬ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ...
Проблема
$\frac{dv}{dt} = \boxed{g} - \nu v$
Не переживай так
ПОТОМУ ЧТО В ЭТОТ РАЗ МЫ РАЗБИРАЕМ ПРИМЕР ПОСЛОЖНЕЕ.
ДАВАЙ ПОРАЗМЫСЛИМ.
Дифференциальное уравнение движения частицы воды из облака
Изменение скорости объекта по отношению к изменению времени
Действующие на объект силы на единицу массы
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
В ЛЕВОЙ ЧАСТИ ЭТОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НАХОДИТСЯ ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ОБЪЕКТА ПО ОТНОШЕНИЮ К ИЗМЕНЕНИЮ ВРЕМЕНИ.
В ПРАВОЙ ЖЕ ЧАСТИ НАХОДЯТСЯ ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ОБЪЕКТ СИЛЫ (ДЕЛЕННЫЕ НА МАССУ).
ДА...


Другими словами, скорость объекта меняется под влиянием сил, записанных в правой части.
Таким образом,
$$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$$
Это демонстрирует, что скорость объекта меняется в зависимости от двух показателей – g и $-\nu v$.
g
$-\nu v$
Из этих двух параметров g – это константа, равная ускорению силы тяжести,
а $-\nu v$ – это функция от скорости объекта (капли) v, пропорциональная скорости.
g
$-\nu v$
Ээ... То есть...
Хорошо...
Давай посмотрим на вещи с точки зрения физики.
$-\nu v$
Первый показатель – константа g – это воздействующая на объект постоянная сила тяжести.
Понятно.
Другими словами, он показывает, что тело движется вниз с ускорением.


Предположим, что сначала объект находится в состоянии покоя,
Стой тут
Не двигайся
?
Тогда движение вниз с ускорением...
А...
Па-пам
...означает, что скорость объекта при падении v постепенно возрастает.
Ой, Дайчи!
ААА!
v – увеличивается
Сила сопро-тивления
Сила тяжести
Если v увеличивается, то и значение νv растет, а значит, увеличивается и направленная вверх сила сопротивления.
Ага...
νv
g
v
Уф
Кажется, он здорово испугался
Простите
Правая часть уравнения выражает совокупное действие силы тяжести и сопротивления,
поэтому чем быстрее будет падение объекта вниз, тем меньше будет влияние сил, тянущих этот объект вниз.
А!
В конце концов...
Сила тяжести и сила сопротивления сбалансируются!
Угу.
Значение силы сопротивления ведь не может превысить значение силы тяжести!
Недавно говорили об этом!!!
А поскольку сила тяжести и сопротивления сбалансированы, то в итоге объект будет падать с постоянной скоростью.
Ага...
АААА!!!
Посто-янная
Сила сопро-тивления
Сила тяжести


А теперь попробуем представить, что будет, если будет отсутствовать сила тяжести.
Хи-хи
Э?
Ах-ха!
Вжих
Ооо!!
!?
Это называется **мысленный эксперимент**.
Если нет силы тяжести, то нет силы, движущей объект вниз, поэтому если изначально объект в состоянии покоя, то он не начнет падать, а останется на месте.
Состояние покоя
Ооо! Плыву...
Но когда ничего не происходит, это не интересно, поэтому сделаем так, чтобы он изначально двигался.
Йааа!!
Ой!
Скорость, с которой объект изначально двигается, назовем **начальной скоростью** и обозначим v_0. Тогда начальная сила сопротивления будет $-\nu v_0$.
Начальная скорость v_0
Сопротивление $-\nu v_0$
Однако сила сопротивления действует в обратном направлении к движущемуся объекту, поэтому скорость объекта начнет постепенно уменьшаться...

$$\frac{dv}{dt} = -\nu v$$

Обе части делим на v и интегрируем

$$\int \frac{1}{v} dv = -\nu \int dt$$

Преобразуем каждый интеграл по отдельности

$$\int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + C_1 \qquad -\nu \int dt = -\nu t + C_2$$

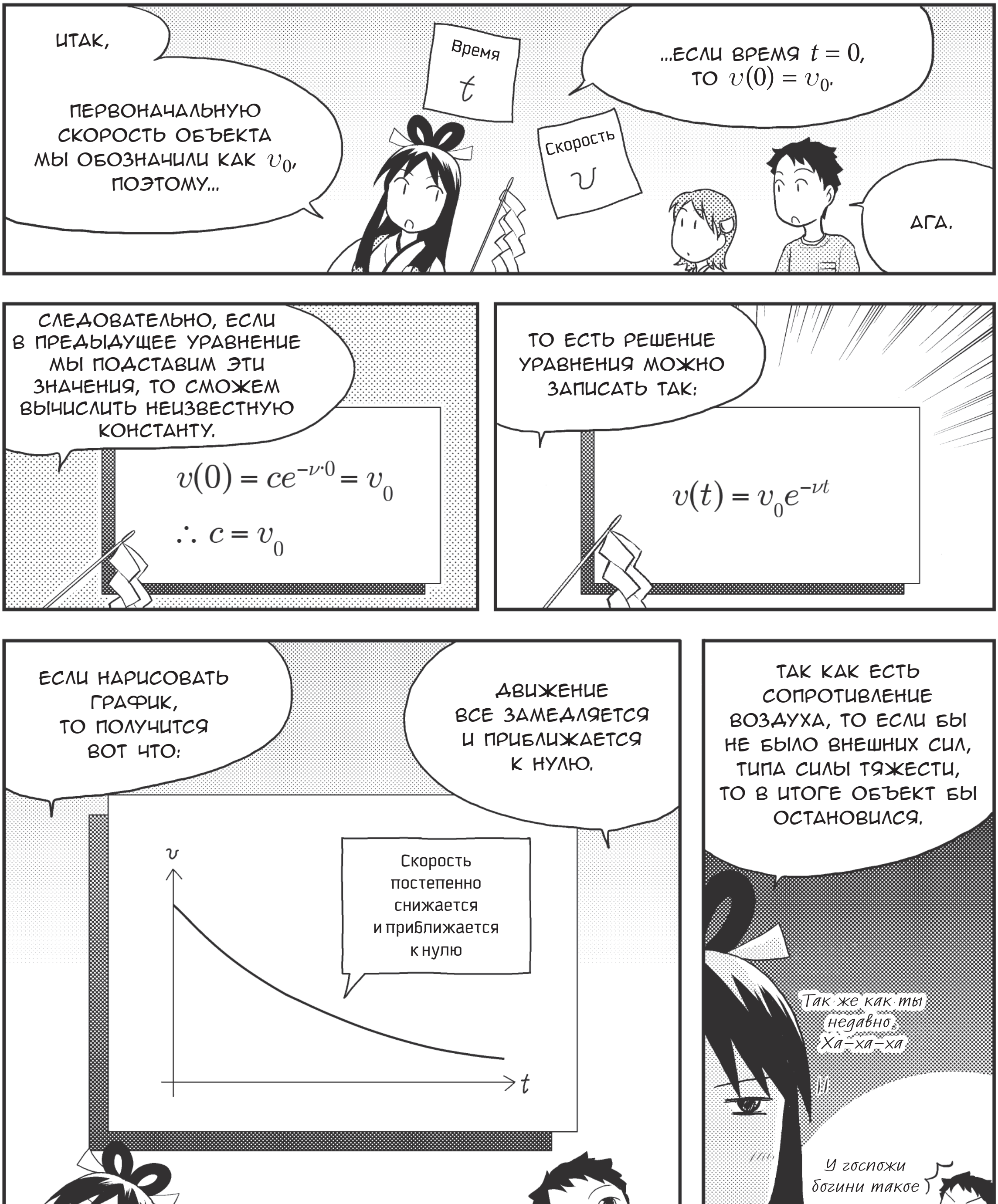
Объединим интегральные константы в одну

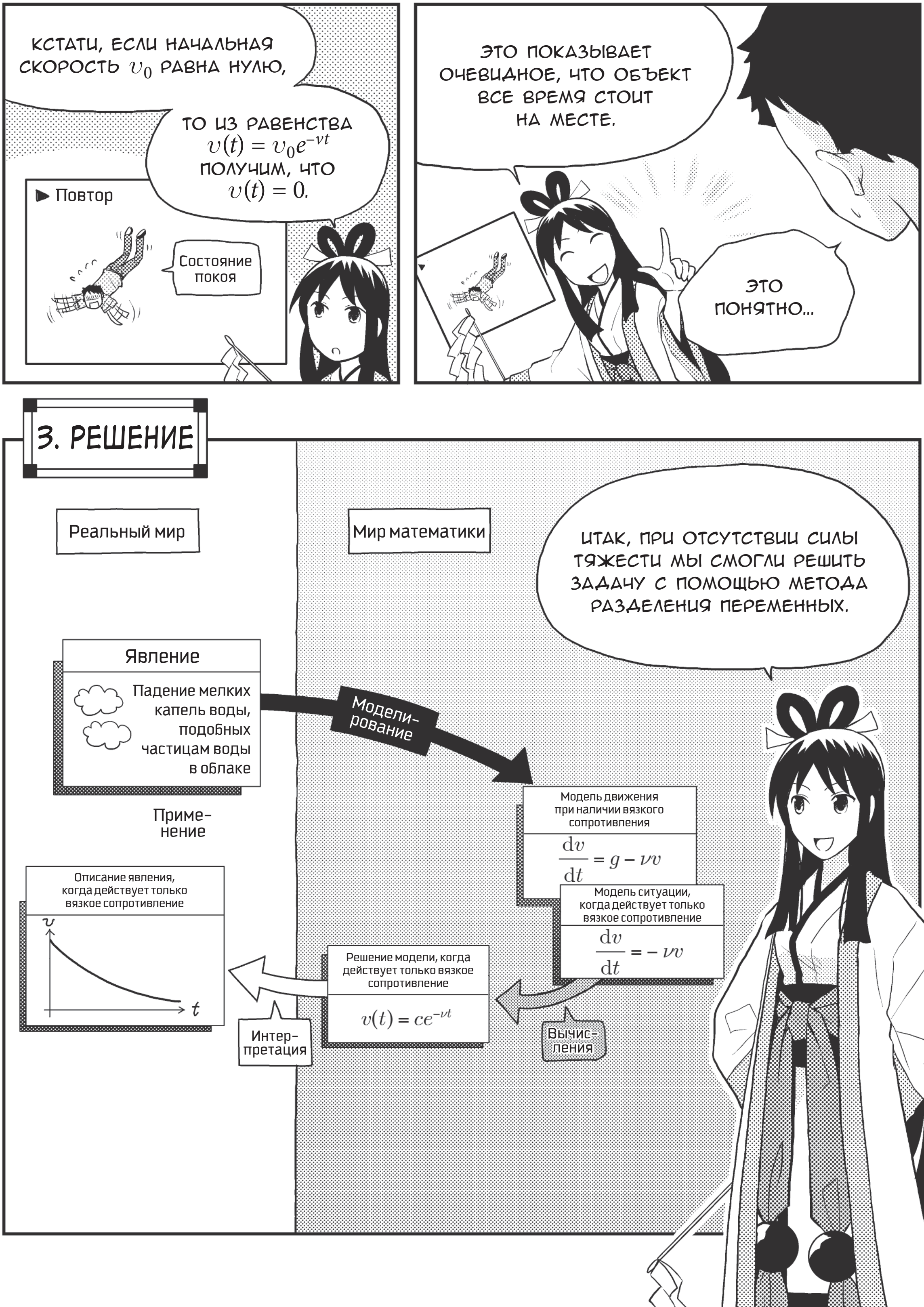
$$\ln|v| = -\nu t + C$$

Выводим v

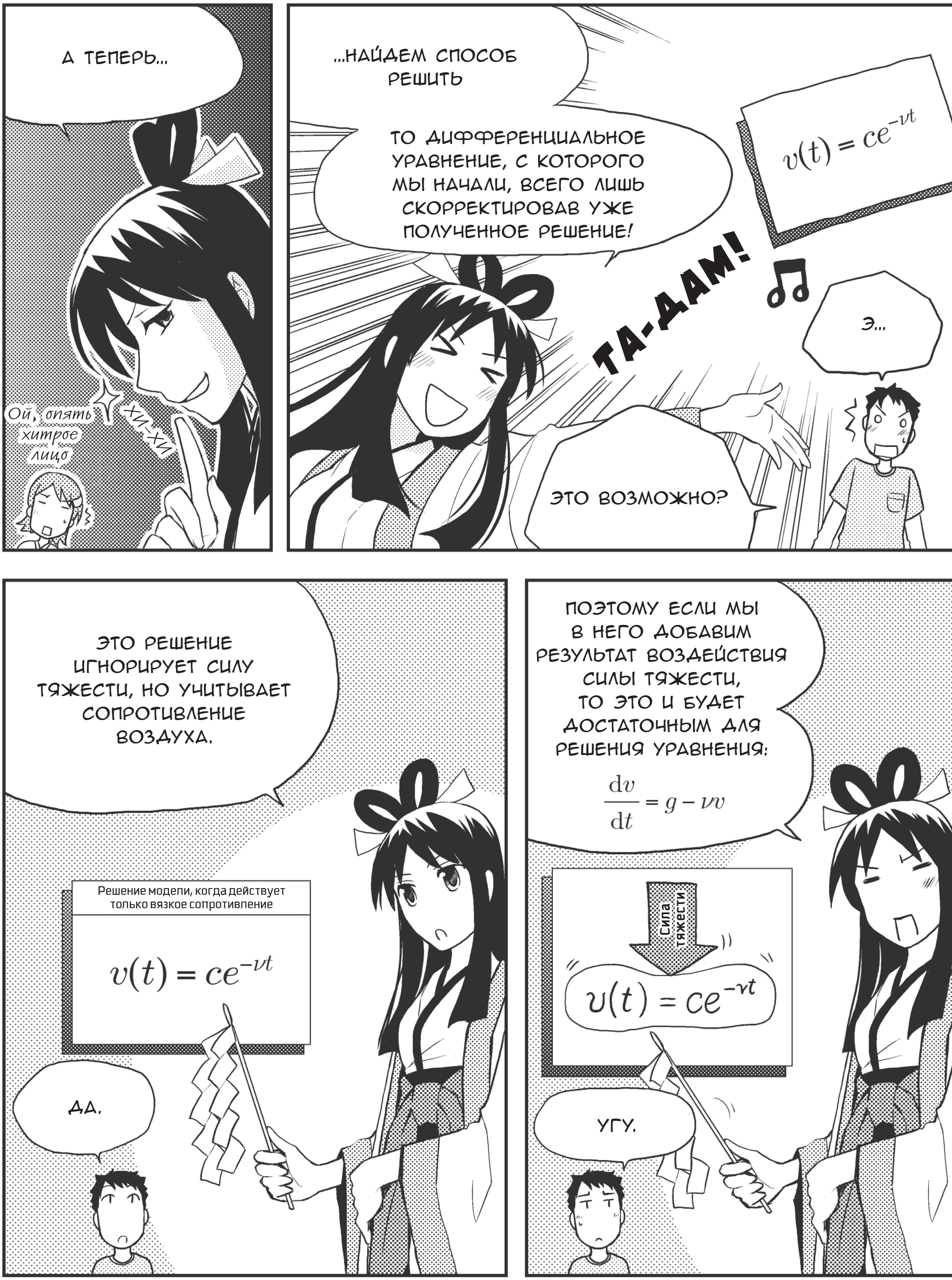
Решение для ситуации, когда действует только вязкое сопротивление

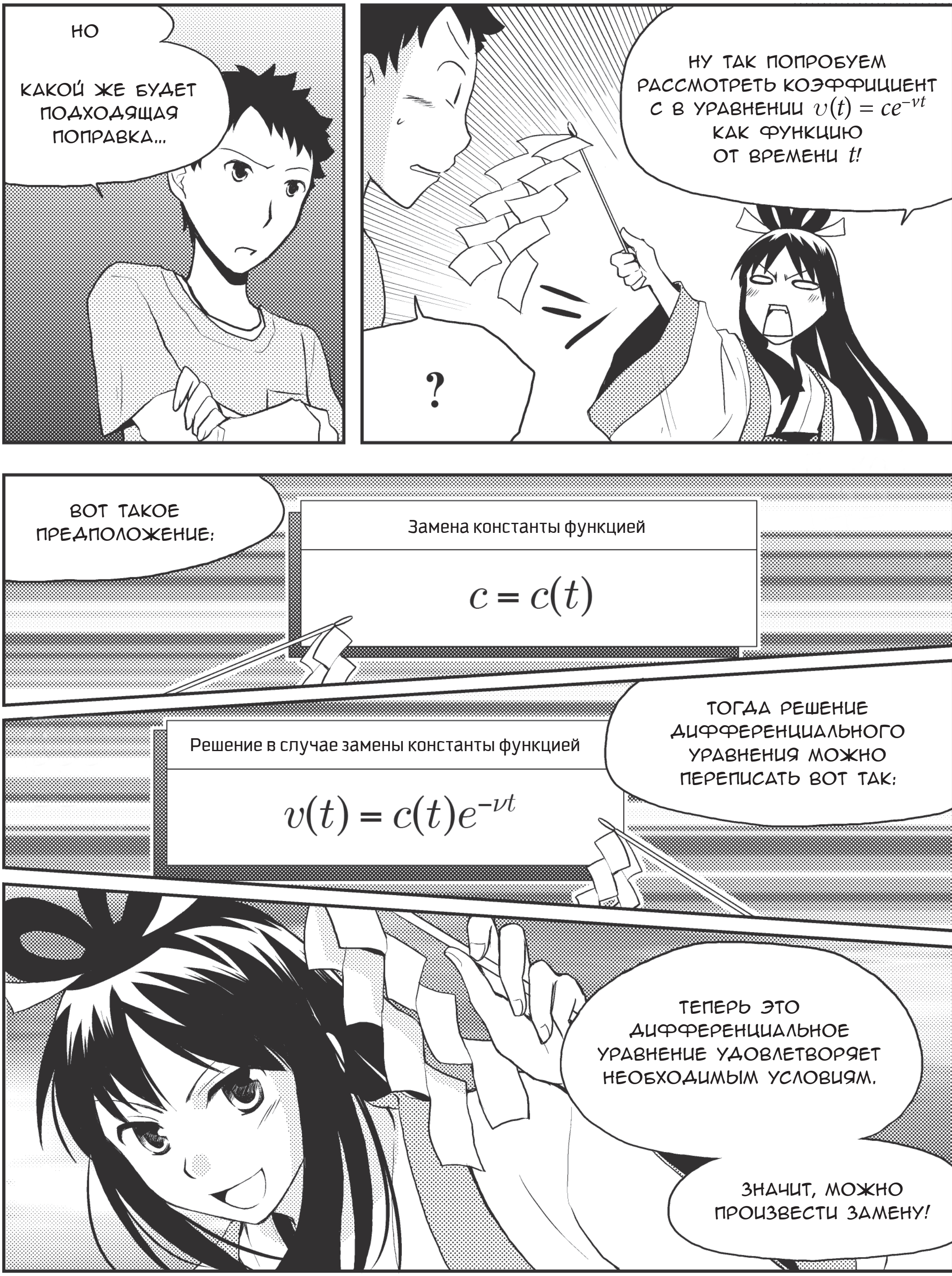
$$\begin{aligned} v(t) &= \pm e^{-\nu t + C} \\ &= \pm e^{C} e^{-\nu t} \\ &= c e^{-\nu t} \end{aligned}$$


Итак,
первоначальную скорость объекта мы обозначили как v_0, поэтому...
Время t
Скорость v
...если время $t = 0$, то $v(0) = v_0$.
Ага.
Следовательно, если в предыдущее уравнение мы подставим эти значения, то сможем вычислить неизвестную константу.
$v(0) = ce^{-\nu \cdot 0} = v_0$
$\therefore c = v_0$
То есть решение уравнения можно записать так:
$v(t) = v_0 e^{-\nu t}$
Если нарисовать график, то получится вот что:
Движение все замедляется и приближается к нулю.
v
t
Скорость постепенно снижается и приближается к нулю
Так как есть сопротивление воздуха, то если бы не было внешних сил, типа силы тяжести, то в итоге объект бы остановился.
Так же как ты недавно, Ха-ха-ха
У госпожи богини такое хитрое лицо



Кстати, если начальная скорость v_0 равна нулю,
то из равенства $v(t) = v_0 e^{-\nu t}$ получим, что $v(t) = 0$.
▶ Повтор
Состояние покоя
Это показывает очевидное, что объект все время стоит на месте.
Это понятно...
3. РЕШЕНИЕ
Реальный мир
Мир математики
Итак, при отсутствии силы тяжести мы смогли решить задачу с помощью метода разделения переменных.
Явление
Падение мелких капель воды, подобных частицам воды в облаке
Моделирование
Модель движения при наличии вязкого сопротивления
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
Модель ситуации, когда действует только вязкое сопротивление
$\frac{dv}{dt} = -\nu v$
Вычисления
Решение модели, когда действует только вязкое сопротивление
$v(t) = ce^{-\nu t}$
Интерпретация
Описание явления, когда действует только вязкое сопротивление
v
t
Применение


А ТЕПЕРЬ...
Ой, опять хитрое лицо
ХИ-ХИ
...НАЙДЕМ СПОСОБ РЕШИТЬ
ТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, С КОТОРОГО МЫ НАЧАЛИ, ВСЕГО ЛИШЬ СКОРРЕКТИРОВАВ УЖЕ ПОЛУЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ!
$v(t) = ce^{-\nu t}$
ТА-ДАМ!
Э...
ЭТО ВОЗМОЖНО?
ЭТО РЕШЕНИЕ ИГНОРИРУЕТ СИЛУ ТЯЖЕСТИ, НО УЧИТЫВАЕТ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА.
Решение модели, когда действует только вязкое сопротивление
$v(t) = ce^{-\nu t}$
ДА.
ПОЭТОМУ ЕСЛИ МЫ В НЕГО ДОБАВИМ РЕЗУЛЬТАТ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ, ТО ЭТО И БУДЕТ ДОСТАТОЧНЫМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ:
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
Сила тяжести
$v(t) = ce^{-\nu t}$
УГУ.


НО
КАКОЙ ЖЕ БУДЕТ ПОДХОДЯЩАЯ ПОПРАВКА...
НУ ТАК ПОПРОБУЕМ РАССМОТРЕТЬ КОЭФФИЦИЕНТ С В УРАВНЕНИИ $v(t) = ce^{-\nu t}$ КАК ФУНКЦИЮ ОТ ВРЕМЕНИ t!
?
ВОТ ТАКОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ:
Замена константы функцией
$c = c(t)$
ТОГДА РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МОЖНО ПЕРЕПИСАТЬ ВОТ ТАК:
Решение в случае замены константы функцией
$v(t) = c(t)e^{-\nu t}$
ТЕПЕРЬ ЭТО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УДОВЛЕТВОРЯЕТ НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ.
ЗНАЧИТ, МОЖНО ПРОИЗВЕСТИ ЗАМЕНУ!

■ Итоговые вычисления

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = g - \nu\upsilon$$

Дифференциальное уравнение, которое мы хотели решить изначально.
Подставляем замену $v(t) = c(t)e^{-vt}$.

$$\frac{\mathrm{d}(c(t)e^{-\nu t})}{\mathrm{d}t} = g - \nu(c(t)e^{-\nu t})$$

Продифференцируем левую часть...

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\nu t} + c(t)\frac{\mathrm{d}e^{-\nu t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\nu t} + c(t)(-\nu e^{-\nu t})}$$

Возвращаемся:

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\nu t} - \nu c(t)e^{-\nu t} = g - \nu c(t)e^{-\nu t}$$

Сокращаем на $vc(t)e^{-vt}$ в обеих частях уравнения.

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\nu t} = g$$

Переносим e^{-vt} и интегрируем.

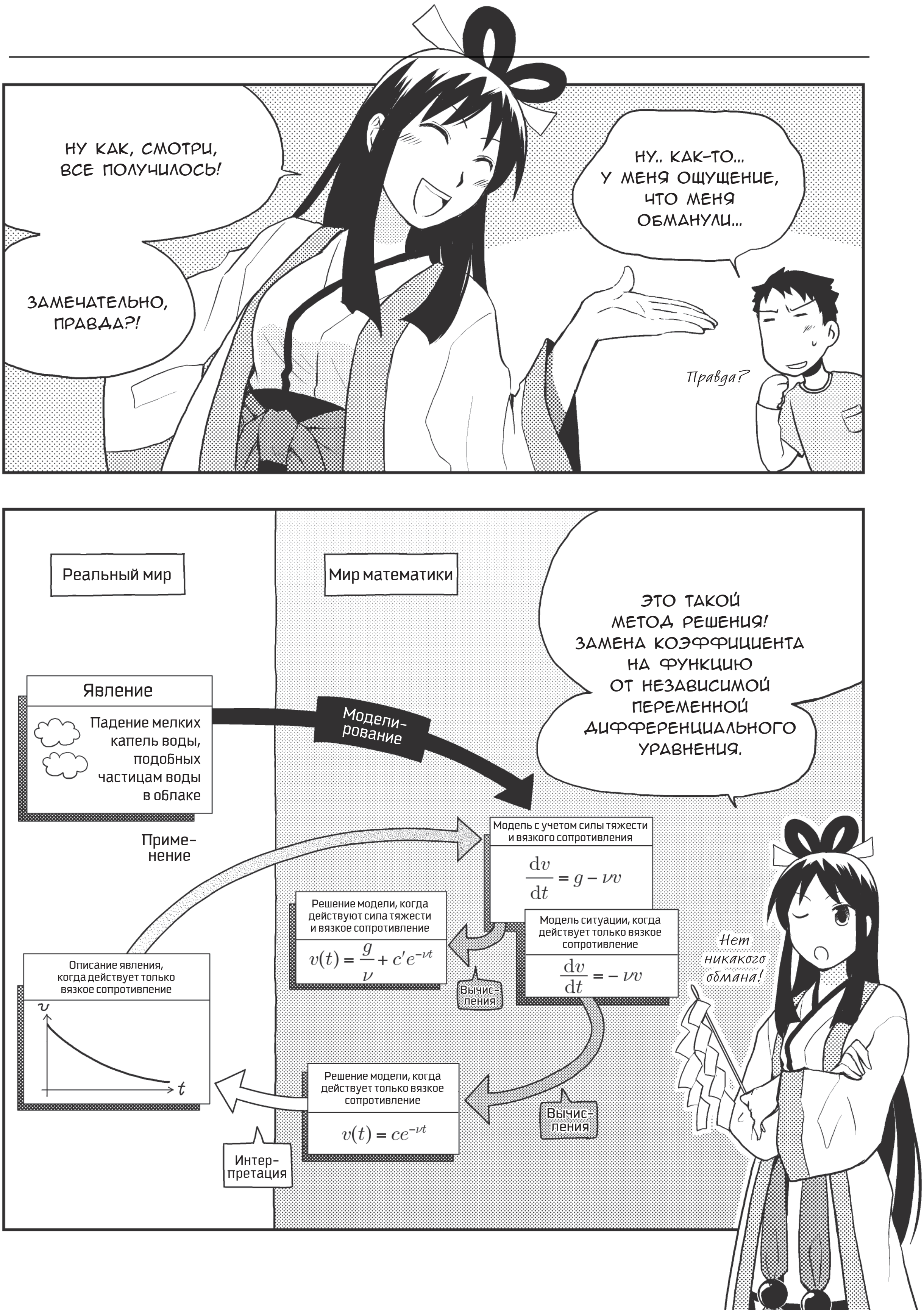
$$c(t) = g\int e^{\nu t}\mathrm{d}t$$

$$= g\frac{e^{\nu t}}{\nu} = c'$$

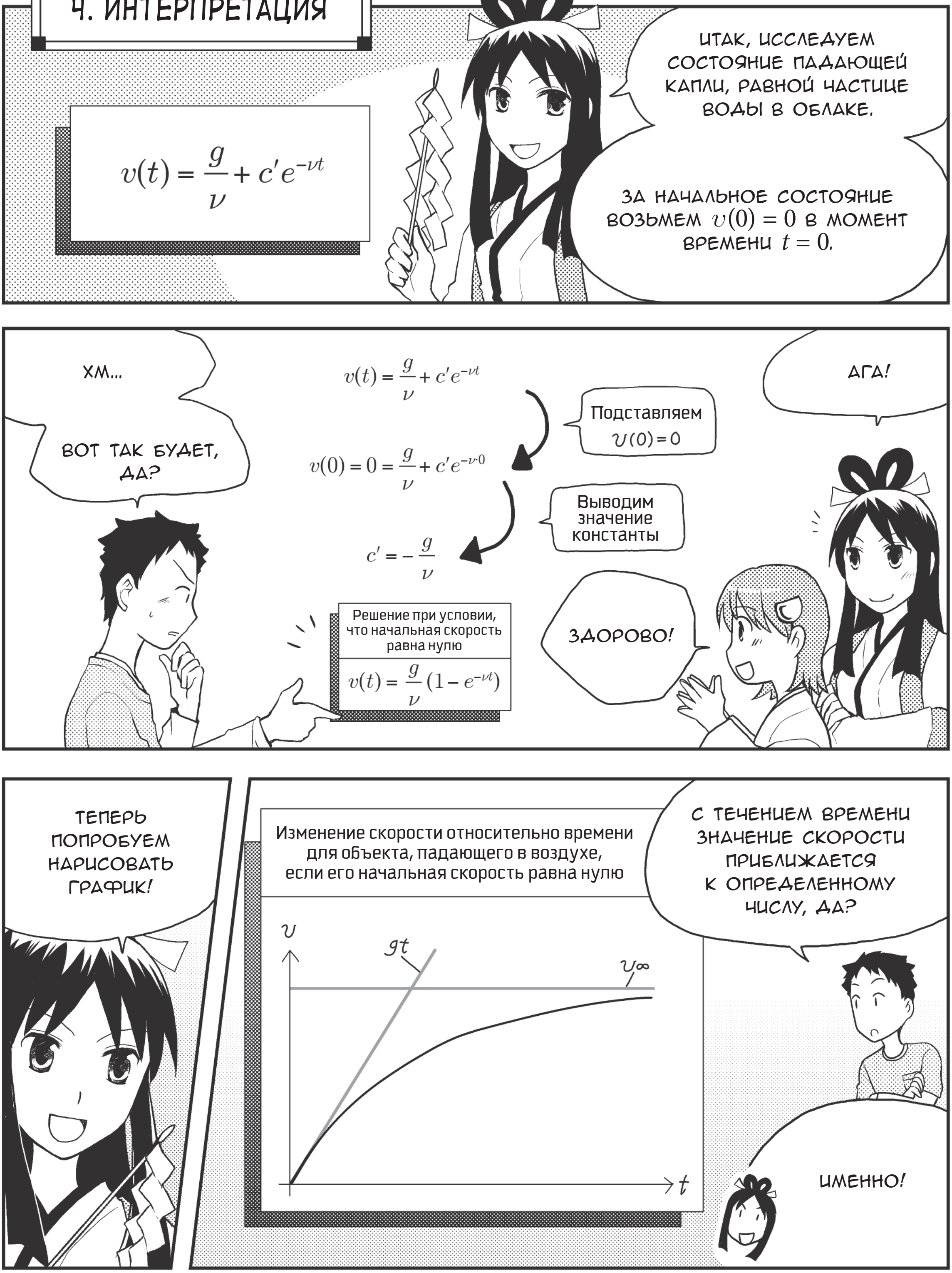
Подставляем замену $v(t) = c(t)e^{-vt}$.

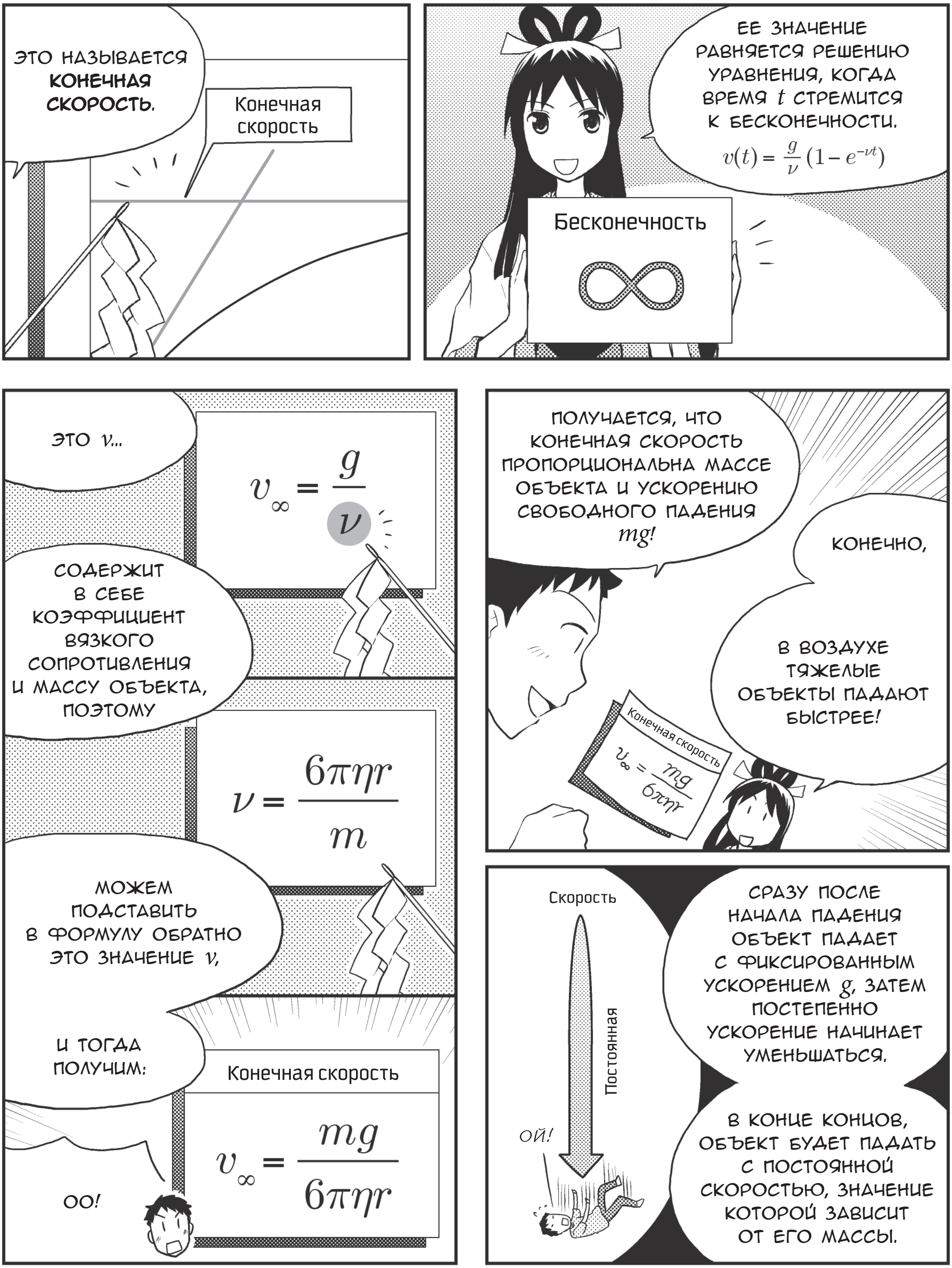
$$\boxed{\begin{aligned} \upsilon(t) &= \left(g\frac{e^{\nu t}}{\nu} + c'\right)e^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t} \end{aligned}}$$

Решение для ситуации, когда действуют сила тяжести и вязкое сопротивление.


НУ КАК, СМОТРИ, ВСЕ ПОЛУЧИЛОСЬ!
ЗАМЕЧАТЕЛЬНО, ПРАВДА?!
НУ.. КАК-ТО... У МЕНЯ ОЩУЩЕНИЕ, ЧТО МЕНЯ ОБМАНУЛИ...
Правда?
Реальный мир
Мир математики
ЭТО ТАКОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ! ЗАМЕНА КОЭФФИЦЦЕНТА НА ФУНКЦИЮ ОТ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.
Явление
Падение мелких капель воды, подобных частицам воды в облаке
Модели-рование
Приме-нение
Модель с учетом силы тяжести и вязкого сопротивления
$\frac{dv}{dt} = g - \nu v$
Решение модели, когда действуют сила тяжести и вязкое сопротивление
$v(t) = \frac{g}{\nu} + c' e^{-\nu t}$
Модель ситуации, когда действует только вязкое сопротивление
$\frac{dv}{dt} = -\nu v$
Вычис-ления
Описание явления, когда действует только вязкое сопротивление
v
t
Решение модели, когда действует только вязкое сопротивление
$v(t) = ce^{-\nu t}$
Вычис-ления
Интер-претация
Нет никакого обмана!

4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ





Это называется **конечная скорость**.
Конечная скорость
Ее значение равняется решению уравнения, когда время t стремится к бесконечности.
$v(t) = \frac{g}{\nu}(1 - e^{-\nu t})$
Бесконечность
∞
Это ν...
$v_\infty = \frac{g}{\nu}$
содержит в себе коэффициент вязкого сопротивления и массу объекта, поэтому
$\nu = \frac{6\pi\eta r}{m}$
можем подставить в формулу обратно это значение ν,
и тогда получим:
Конечная скорость
$v_\infty = \frac{mg}{6\pi\eta r}$
Оо!
Получается, что конечная скорость пропорциональна массе объекта и ускорению свободного падения mg!
Конечно,
в воздухе тяжелые объекты падают быстрее!
Конечная скорость
$v_\infty = \frac{mg}{6\pi\eta r}$
Скорость
Постоянная
Ой!
Сразу после начала падения объект падает с фиксированным ускорением g, затем постепенно ускорение начинает уменьшаться.
В конце концов, объект будет падать с постоянной скоростью, значение которой зависит от его массы.

Так же, как в случае, когда мы предполагали отсутствие силы тяжести, попробуем рассмотреть ситуацию, когда начальная скорость равна не нулю, а v_0.

$$v(t) = \frac{g}{\nu} + c' e^{-\nu t}$$

Подставим $v(0) = v_0$.

$$v(0) = v_0 = \frac{g}{\nu} + c' e^{-\nu \cdot 0}$$

Выводим константу.

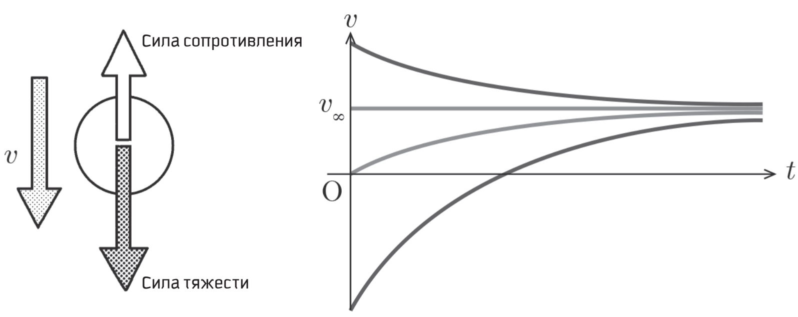
$$c' = v_0 - \frac{g}{\nu}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{g}{\nu} + \left(v_0 - \frac{g}{\nu}\right) e^{-\nu t} \\ &= \frac{g}{\nu}(1 - e^{-\nu t}) + v_0 e^{-\nu t} \end{aligned}}$$

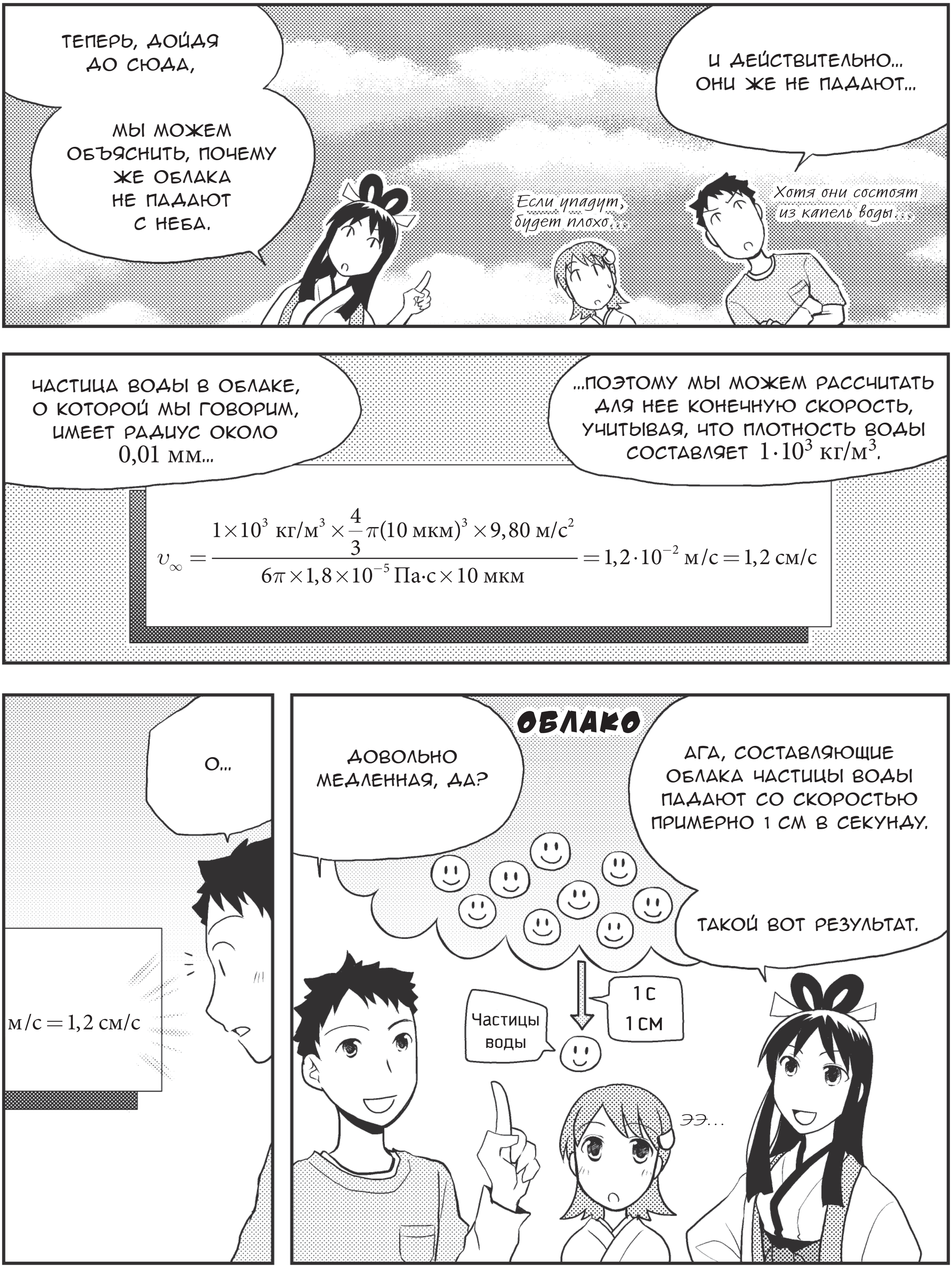
Решение для случая, когда начальная скорость равна v_0.

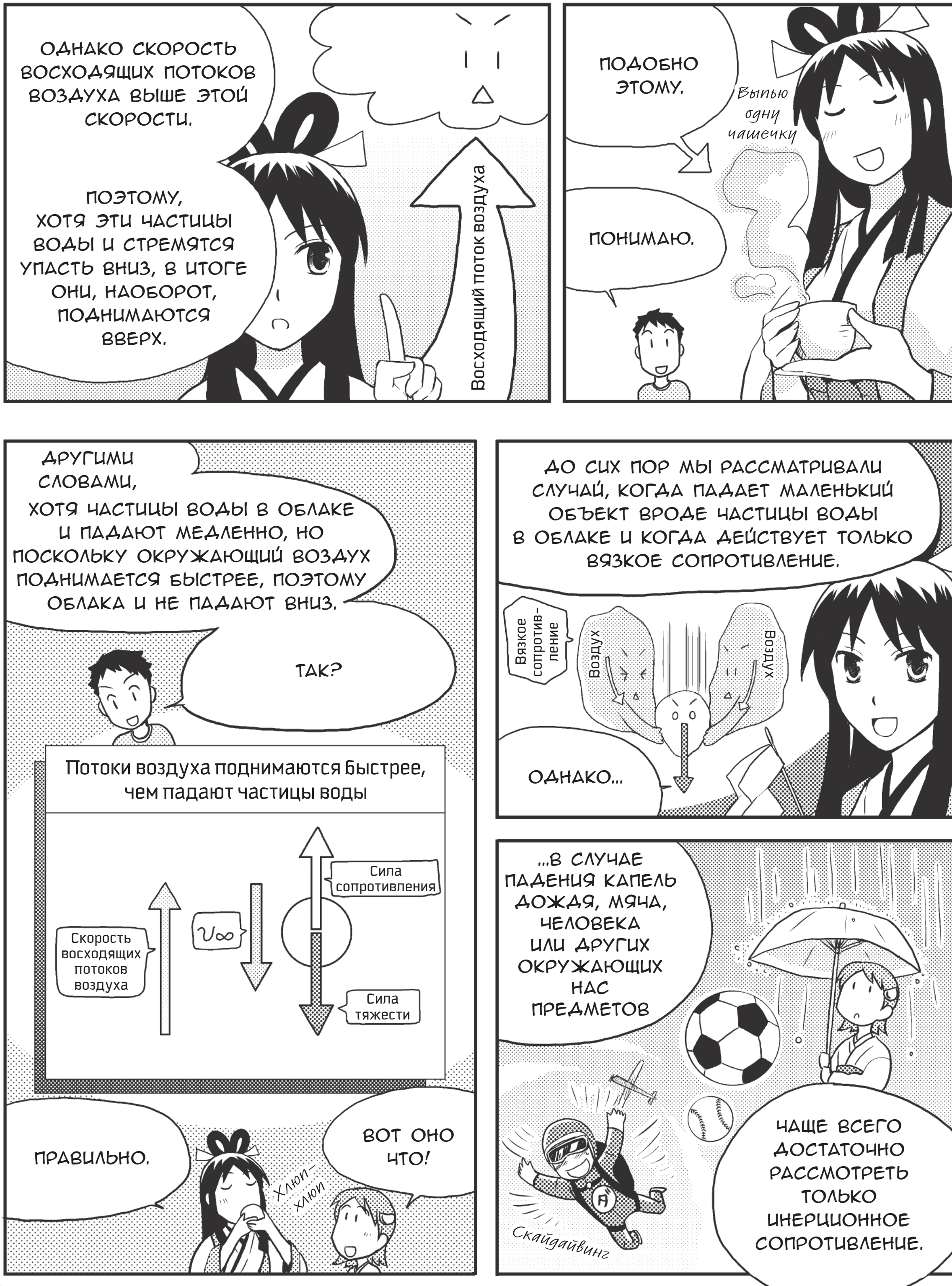
Если посмотреть на график, то видно, что когда начальная скорость v_0 положительна, то изменение скорости изначально направлено вниз, а если отрицательна, то изменение скорости изначально направлено вверх, но...

...каким бы оно не было, в итоге значение скорости будет стремиться к конечной скорости $mg/6\pi\eta r$!



Изменение скорости падающего в воздухе объекта относительно времени при начальной скорости v_0


Теперь, дойдя до сюда,
мы можем объяснить, почему же облака не падают с неба.
Если упадут, будет плохо...
И действительно... они же не падают...
Хотя они состоят из капель воды...
Частица воды в облаке, о которой мы говорим, имеет радиус около 0,01 мм...
...поэтому мы можем рассчитать для нее конечную скорость, учитывая, что плотность воды составляет $1 \cdot 10^3$ кг/м^3.
$$v_\infty = \frac{1\times10^3\ \text{кг/м}^3 \times \frac{4}{3}\pi(10\ \text{мкм})^3 \times 9{,}80\ \text{м/с}^2}{6\pi\times1{,}8\times10^{-5}\ \text{Па}\cdot\text{с}\times10\ \text{мкм}} = 1{,}2\cdot10^{-2}\ \text{м/с} = 1{,}2\ \text{см/с}$$
О...
м/с = 1,2 см/с
ОБЛАКО
Довольно медленная, да?
Ага, составляющие облака частицы воды падают со скоростью примерно 1 см в секунду.
Такой вот результат.
Частицы воды
1 с
1 см
Ээ...


Однако скорость восходящих потоков воздуха выше этой скорости.
Поэтому, хотя эти частицы воды и стремятся упасть вниз, в итоге они, наоборот, поднимаются вверх.
Восходящий поток воздуха
Подобно этому.
Выпью одну чашечку
Понимаю.
Другими словами,
хотя частицы воды в облаке и падают медленно, но поскольку окружающий воздух поднимается быстрее, поэтому облака и не падают вниз.
Так?
Потоки воздуха поднимаются быстрее, чем падают частицы воды
Скорость восходящих потоков воздуха
v_∞
Сила сопротивления
Сила тяжести
Правильно.
Хлюп-хлюп
Вот оно что!
До сих пор мы рассматривали случай, когда падает маленький объект вроде частицы воды в облаке и когда действует только вязкое сопротивление.
Вязкое сопротивление
Воздух
Воздух
Однако...
...в случае падения капель дождя, мяча, человека или других окружающих нас предметов
Скайдайвинг
чаще всего достаточно рассмотреть только инерционное сопротивление.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{4}\pi\rho r^2 v^2$$

$$mg = \frac{1}{4}\pi\rho r^2 v_\infty^2$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{4mg}{\pi\rho r^2}}$$

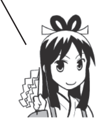
Уравнение движения в случае, если действует только инерционное сопротивление. Выразим конечную скорость, учитывая, что сила тяжести и сила сопротивления сбалансированы, а значит, ускорение (dv/dt) равно нулю...

Конечная скорость в случае, если действует только инерционное сопротивление.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= f - \frac{g}{v_\infty^2}v^2\\ &= \frac{g}{v_\infty^2}(v_\infty^2 - v^2)\\ &= \frac{g}{v_\infty^2}(v_\infty - v)(v_\infty + v)\end{aligned}}$$

В обеих частях возьмем обратные значения.

Небольшая хитрость



$$\frac{dt}{dv} = \frac{v_\infty^2}{g}\frac{1}{(v_\infty - v)(v_\infty + v)}$$

Метод разделения переменных, да?!

$$\frac{dt}{dv} = \frac{v_\infty}{2g}\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v}\right)$$

В правой части используем разложение дробей на части.

$$\int dt = \int \frac{v_\infty}{2g}\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v}\right)dv$$

Разделив переменные, интегрируем.

$$\begin{aligned}t &= \frac{v_\infty}{2g}\left(-\ln\left|v_\infty - v\right| + \ln\left|v_\infty + v\right|\right) + C\\ &= \frac{v_\infty}{2g}\ln\left|\frac{v_\infty + v}{v_\infty - v}\right| + C\end{aligned}$$

Если изначально объект находился в состоянии покоя, то в момент времени $t = 0$ получаем $v(0) = 0$, а интегральная константа будет такой:

$$0 = \frac{v_\infty}{2g} \ln\left|\frac{v_\infty + 0}{v_\infty - 0}\right| + C$$

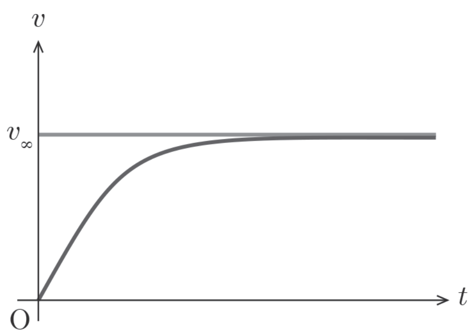
$$\therefore C = 0$$

Скорость объекта v не может превысить конечную скорость, поэтому можно убрать знак модуля. В результате скорость будет такой:

$$t = \frac{v_\infty}{2g} \ln\frac{v_\infty + v}{v_\infty - v}$$

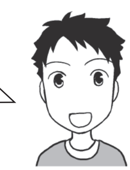
$$\boxed{\therefore v = \frac{1 - e^{-\frac{2g}{v_\infty}t}}{1 + e^{-\frac{2g}{v_\infty}t}} \cdot v_\infty = v_\infty \tanh\frac{gt}{v_\infty}}$$

Решение для случая, когда действует только инерционное сопротивление.



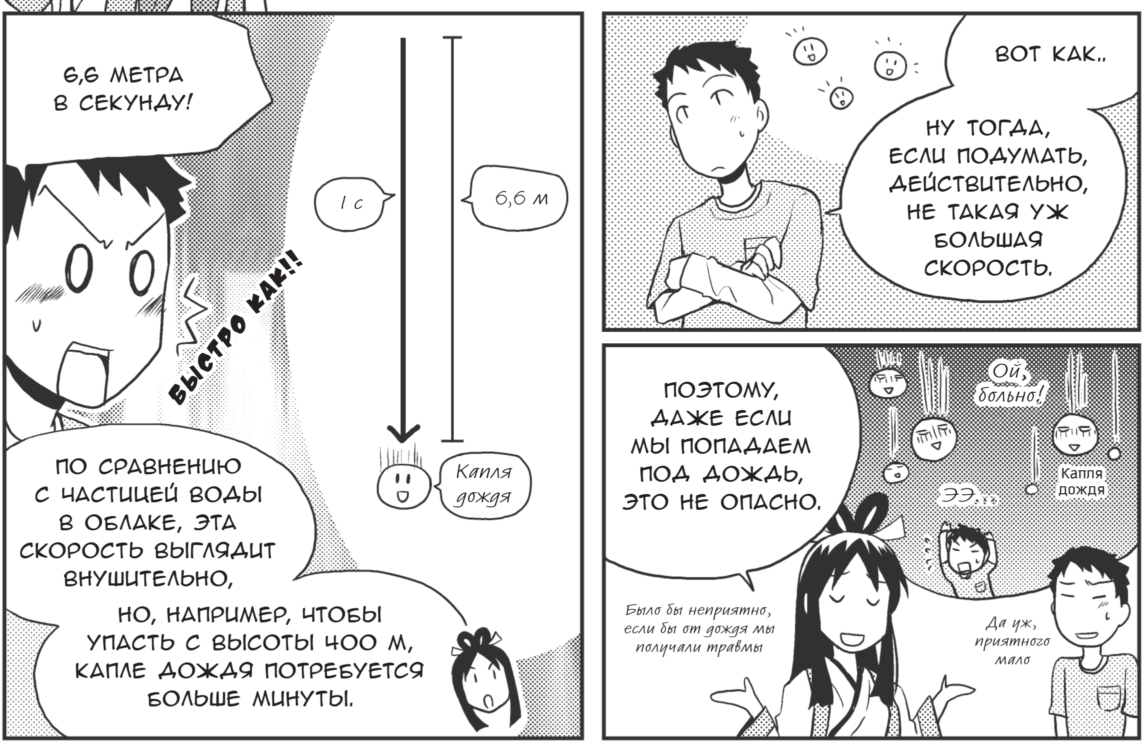
Изменение скорости падающего в воздухе объекта в зависимости от времени при условии нулевой начальной скорости и с учетом инерционного сопротивления

Хотя и похоже на ситуацию с вязким сопротивлением, но тут изгиб кривой более резкий, да?



- Радиус: 1000 мкм (= 1 мм)
- Плотность атмосферы $\rho = 1{,}2$ кг/м^3
- Плотность воды $\rho' = 1\times10^3$ кг/м^3

$$v_\infty = \sqrt{\frac{4\times\frac{4}{3}\pi\times1\times10^3\ \text{кг/м}^3\times(1\ \text{мм})^3\times9{,}80\ \text{м/с}^2}{\pi\times1{,}2\ \text{кг/м}^3\times(1\ \text{мм})^2}} = 6{,}6\ \text{м/с}$$




НУ КАК?
ПОНЯТНО ТЕПЕРЬ, КАК РАБОТАТЬ С МОДЕЛЯМИ, КОГДА СНАЧАЛА ПРОЦЕСС МЕНЯЕТСЯ, А ПОТОМ СТАБИЛИЗИРУЕТСЯ?
ДА!
В СЛЕДУЮЩИЙ РАЗ РАЗБЕРЕМ МОДЕЛЬ, КОГДА ФУНКЦИЯ ТО ВОЗРАСТАЕТ, ТО УБЫВАЕТ.
АГА.
Опять что-то сложное...
И НА ЭТОМ МОИ ОБЪЯСНЕНИЯ ЗАКОНЧАТСЯ.
ВОТ
КАК...
......
!!
ДАВАЙ-КА КАК СЛЕДУЕТ СТАРАЙСЯ ДО САМОГО КОНЦА!
А. ХОРОШО!!!
ДАИЧИ!
А ТУМАН-ТО
РАССЕЯЛСЯ!
Время для вкусняшек!
И чая!
ДА!!!

5. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Вернемся к тому, как мы получили решение для дифференциального уравнения, описывающего движение падающего в воздухе объекта с учетом воздействия вязкого сопротивления. Исходное дифференциальное уравнение, которое нас интересует:

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = g - \nu\upsilon, \qquad \leftarrow \text{Исходное дифференциальное уравнение} \tag{4.1}$$

изначально нельзя решить с помощью метода разделения переменных, поэтому сначала мы отбросили первый показатель в правой части g (предполагаем, что его изначально не было), после чего уравнение приобрело вид, подходящий для метода разделения переменных:

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -\nu\upsilon \tag{4.2}$$

(дифференциальное уравнение, к которому можно применить разделение переменных).

Затем мы его решили. Полученное решение

$$\upsilon(t) = ce^{-\nu t} \qquad \leftarrow \text{Общее решение} \tag{4.3}$$

содержит произвольную постоянную c (общим решением называется множество всех решений дифференциального уравнения, и для уравнения n-го порядка оно содержит n произвольных постоянных). В качестве начального состояния мы взяли момент времени $t = 0$, в который $\upsilon(0) = \upsilon_0$, и получили частное решение:

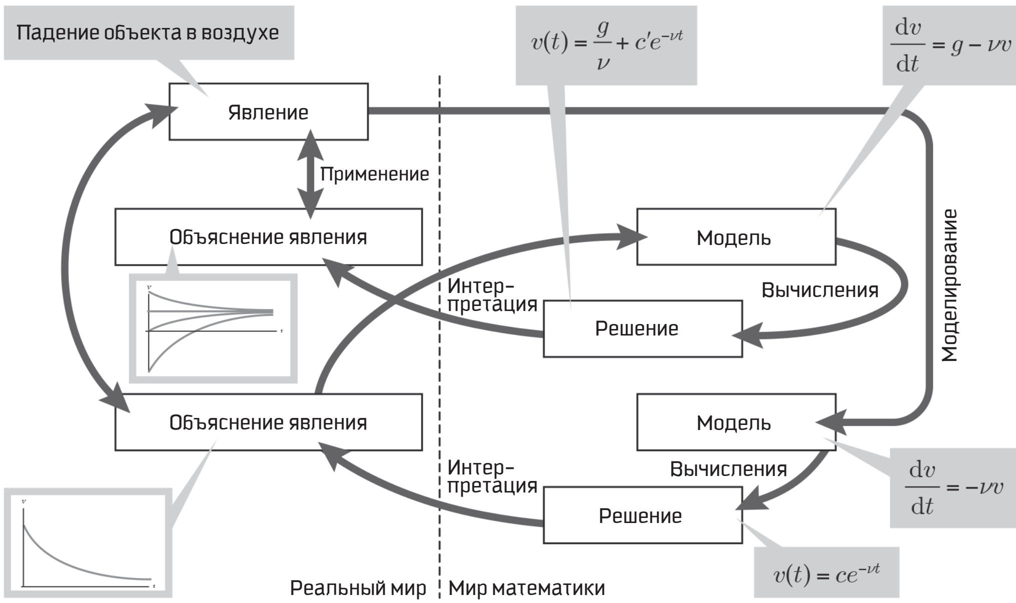
$$\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\nu t}. \qquad \leftarrow \text{Частное решение} \tag{4.4}$$

Когда в общем решении мы заменяем произвольную постоянную на конкретное значение, то получаем частное решение. Если бы нашей задачей было решить уравнение (4.2), то на этом бы мы и закончили. Но мы хотим решить дифференциальное уравнение (4.1), а для этого нам нужно скорректировать полученное методом разделения переменных решение. Для этого в общем решении (4.3) заменим произвольную постоянную c на функцию от времени $c(t)$:

$$\upsilon(t) = c(t)e^{-\nu t}. \tag{4.5}$$

Подставив эту замену в исходное дифференциальное уравнение (4.1), получаем искомое решение:

$$\upsilon(t) = \frac{g}{\nu} + c'e^{-\nu t}. \tag{4.6}$$



Модель движения падающего в воздухе объекта с учетом вязкого сопротивления

Мы получили решение искомого уравнения, но, возможно, существуют сомнения, действительно ли оно подходящее? Попробуем его обобщить[1].

Если записать наше исходное дифференциальное уравнение (4.1) в общем виде, то получим:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \qquad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение} \tag{4.7}$$

Хотя в нашем уравнении движения падающего в воздухе объекта с учетом вязкого сопротивления (4.1) вместо $p(x)$ и $q(x)$ были константы, но в общем случае их можно представить как фунции от x. Уравнение же движения в случае отсутствия силы тяжести (4.2) в общем случае будет выглядеть так:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \qquad \leftarrow \text{Однородное дифференциальное уравнение} \tag{4.8}$$

Оба уравнения линейные, но различаются наличием или отсутствием функции $q(x)$. В уравнении (4.8), которое не содержит $q(x)$, каждое слагаемое содержит или y, или dy/dx, а значит, это уравнение является однородным дифференциальным уравнением. В уравнении (4.7) есть функция $q(x)$, не связанная с переменной y, а значит, это неоднородное дифференциальное уравнение.

---

[1] Это одно из преимуществ математики.

Решаем однородное дифференциальное уравнение (4.8) методом разделения переменных и, обозначив за C интегральную постоянную, получаем:

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x+C} = e^{C}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения} \tag{4.9}$$

Так как решение содержит произвольную постоянную, это общее решение. Заменим содержащуюся в общем решении интегральную константу C на функцию от x – $C(x)$:

$$y = e^{C(x)}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \leftarrow \text{Замена в общем решении однородного уравнения постоянной на функцию}$$

Чтобы упростить вид полученного уравнения, заменим $e^{C(x)}$ на $c(x)$. Получаем такое допустимое решение:

$$y = c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \leftarrow \text{Допустимое решение неоднородного дифференциального уравнения} \tag{4.10}$$

Подставив полученное решение в неоднородное уравнение (4.7), выведем $c(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x);$$
$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + c(x)\frac{\mathrm{d}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x);$$
$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + c(x)(-p(x))e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x);$$
$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x);$$
$$\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Получается, что функция c(x) равна:

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c'. \qquad \leftarrow \text{Допустимая функция}$$

Получив значение допустимой функции c(x), подставим его в решение неоднородного уравнения (4.10):

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c'\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \qquad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения} \tag{4.11}$$

и получаем общее решение неоднородного уравнения.

Теперь раскроем скобки в полученном общем решении неоднородного уравнения (4.11):

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c'e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

А значит, учитывая, что $c' = e^{C}$, получается, что общее решение однородного уравнения (4.9)

$$c'e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \qquad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения}$$

и частное решение неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \qquad \leftarrow \text{Частное решение неоднородного уравнения}$$

в сумме дают общее решение неоднородного уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения = **Общее решение однородного уравнения** + **Частное решение неоднородного уравнения**

Решение неоднородного уравнения

Давайте проверим. Если решением однородного уравнения (4.8) является $y = u(x)$, тогда получим вот такое соотношение:

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} + p(x)u(x) = 0.$$

Если при этом решением неоднородного уравнения (4.7) будет $y = \upsilon(x)$, то получим вот такое соотношение:

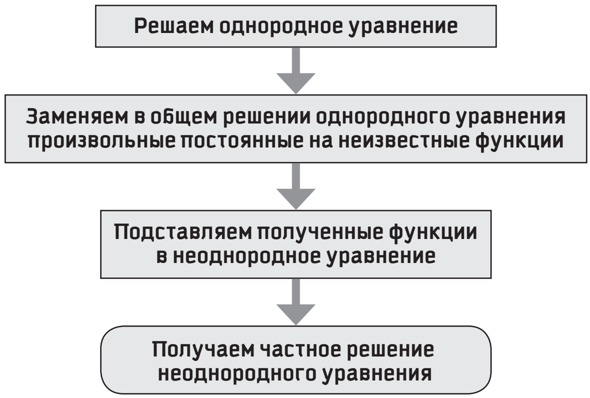
$$\frac{\mathrm{d}\upsilon(x)}{\mathrm{d}x} + p(x)\upsilon(x) = q(x).$$

Если же теперь сложим полученные результаты (4.12) и (4.13), то получим вот такое соотношение:

$$\frac{\mathrm{d}(u(x) + \upsilon(x))}{\mathrm{d}x} + p(x)(u(x) + \upsilon(x)) = q(x).$$

А следовательно, $y = u(x) + \upsilon(x)$ также является решением неоднородного уравнения (4.7). Значит, мы смогли таким способом получить решение неоднородного дифференциального уравнения.

Метод решения неоднородных дифференциальных уравнений называется **методом вариации произвольных постоянных**. Называется он так потому, что для решения неоднородного уравнения мы производим замену произвольных постоянных на неизвестные функции в общем решении однородного уравнения.



Решение неоднородных уравнений

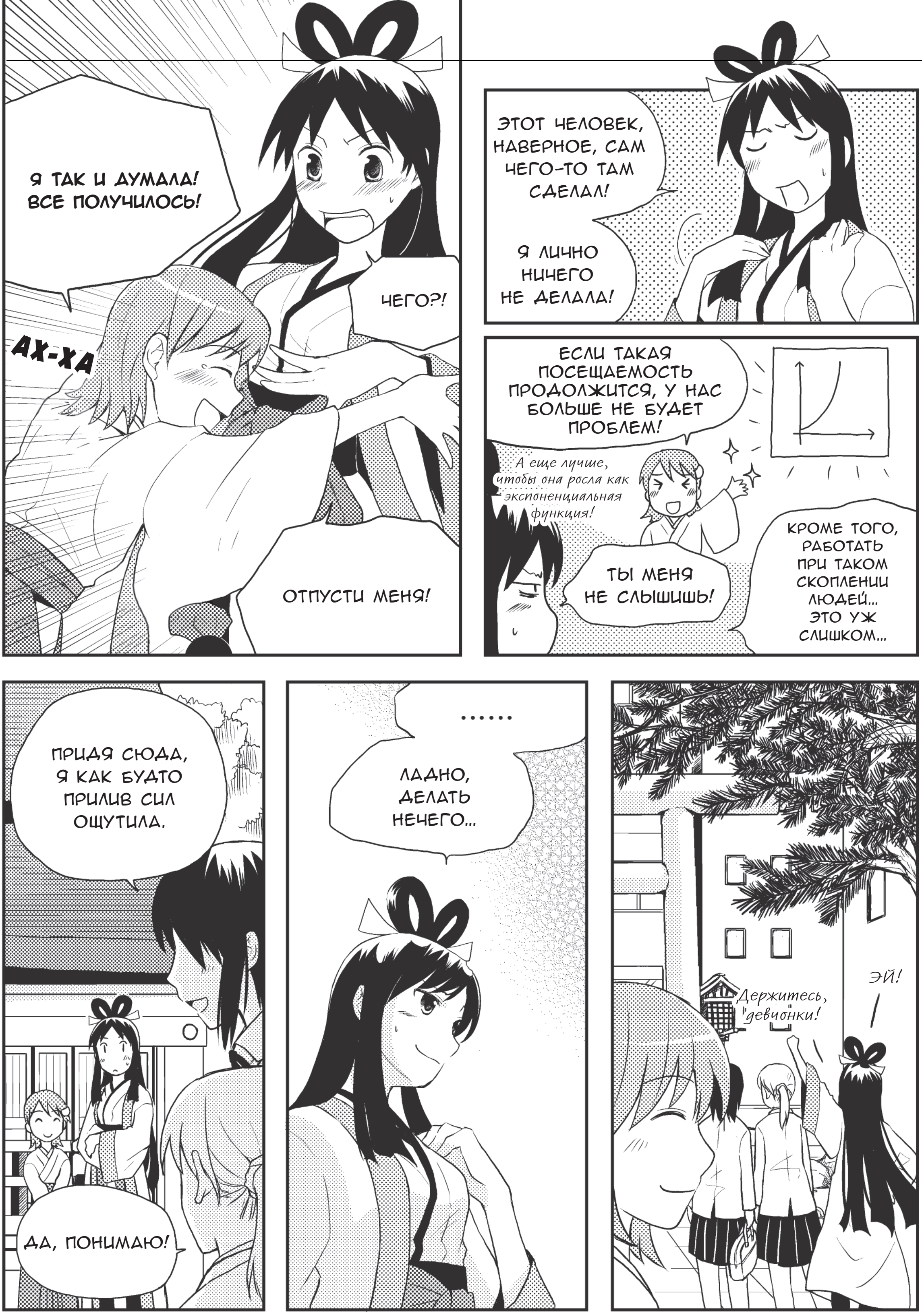
Метод вариации произвольных постоянных – это способ решения неоднородных дифференциальных уравнений, в котором мы сначала решаем легкодоступную для решения часть уравнения (однородное уравнение), а затем корректируем полученное решение, чтобы оно удовлетворяло условиям неоднородного дифференциального уравнения. То есть метод основан на том, что мы сначала решаем то, что можем легко решить, а детали учитываем позднее. И это великолепная идея! Так же и на примере падающего в воздухе объекта, мы сначала находим решение для той части, когда движение объекта меняется по экспоненте, а уже потом приходим к общему конечному решению.

ГЛАВА 5

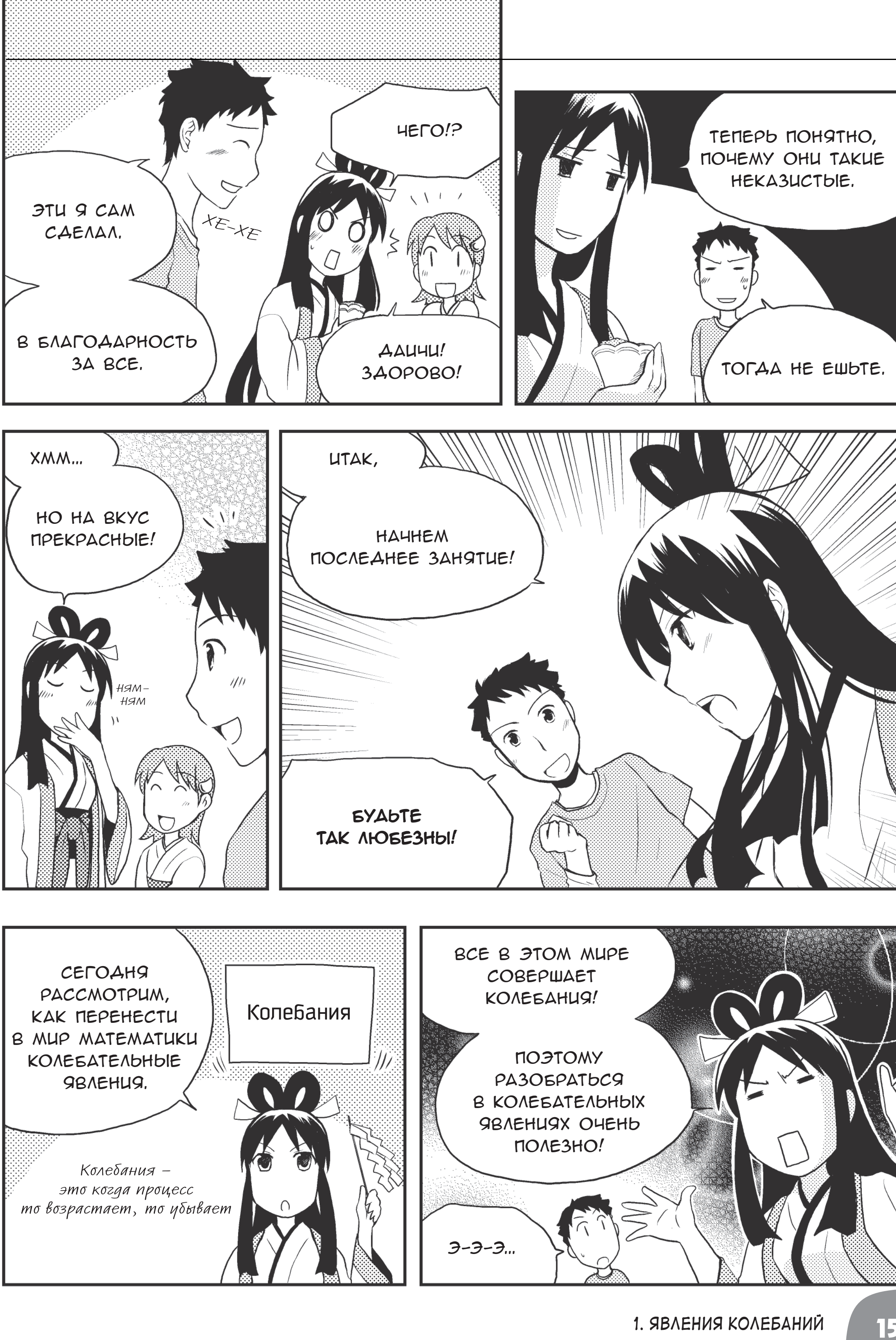
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

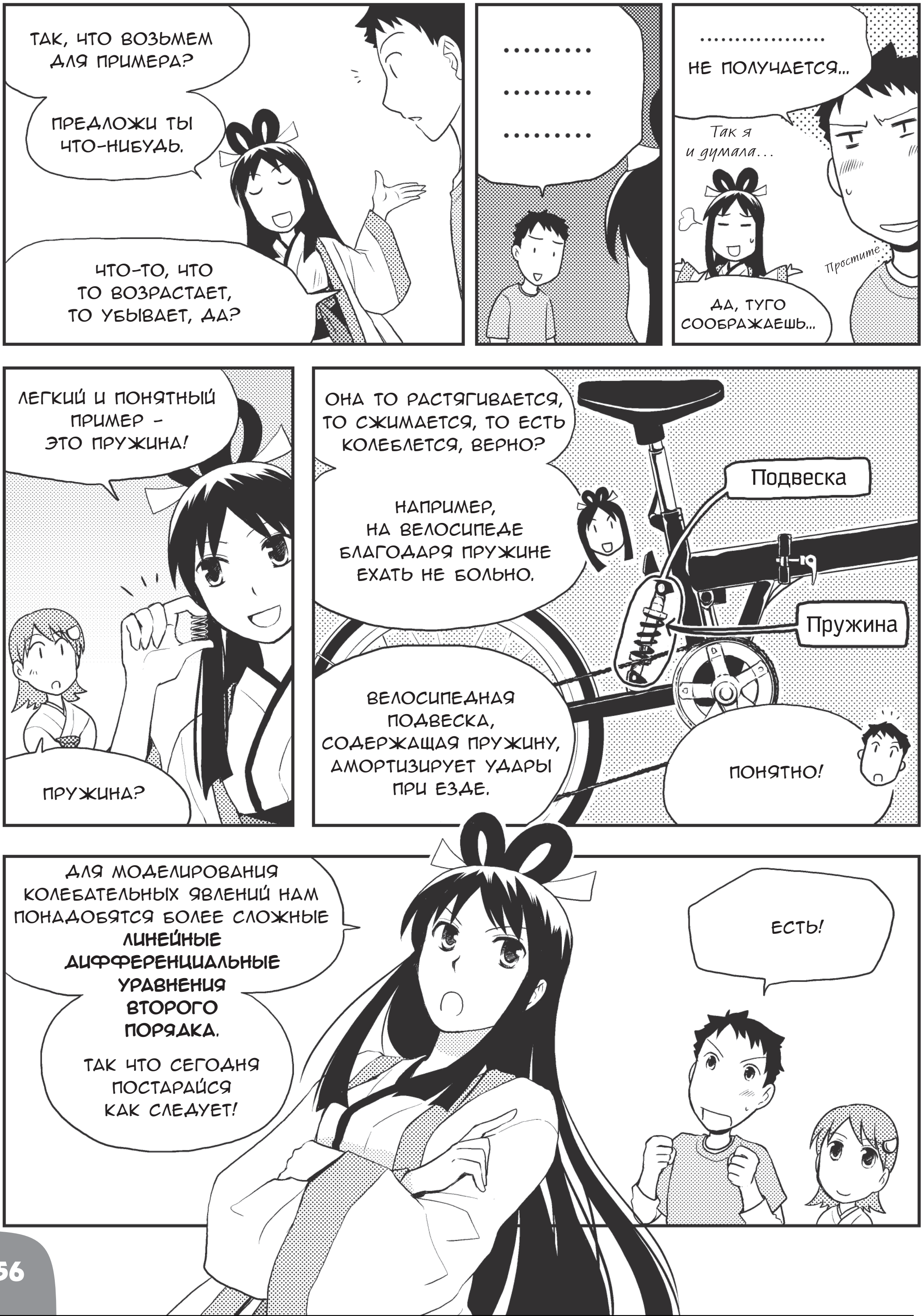
НЕ ТОЛЬКО КОЛЕБАНИЯ

1. ЯВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ


Я ТАК И ДУМАЛА! ВСЕ ПОЛУЧИЛОСЬ!
ЧЕГО?!
АХ-ХА
ОТПУСТИ МЕНЯ!
ЭТОТ ЧЕЛОВЕК, НАВЕРНОЕ, САМ ЧЕГО-ТО ТАМ СДЕЛАЛ!
Я ЛИЧНО НИЧЕГО НЕ ДЕЛАЛА!
ЕСЛИ ТАКАЯ ПОСЕЩАЕМОСТЬ ПРОДОЛЖИТСЯ, У НАС БОЛЬШЕ НЕ БУДЕТ ПРОБЛЕМ!
А еще лучше, чтобы она росла как экспоненциальная функция!
ТЫ МЕНЯ НЕ СЛЫШИШЬ!
КРОМЕ ТОГО, РАБОТАТЬ ПРИ ТАКОМ СКОПЛЕНИИ ЛЮДЕЙ... ЭТО УЖ СЛИШКОМ...
ПРИДЯ СЮДА, Я КАК БУДТО ПРИЛИВ СИЛ ОЩУТИЛА.
ДА, ПОНИМАЮ!
......
ЛАДНО, ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО...
ЭЙ!
Держитесь, девчонки!

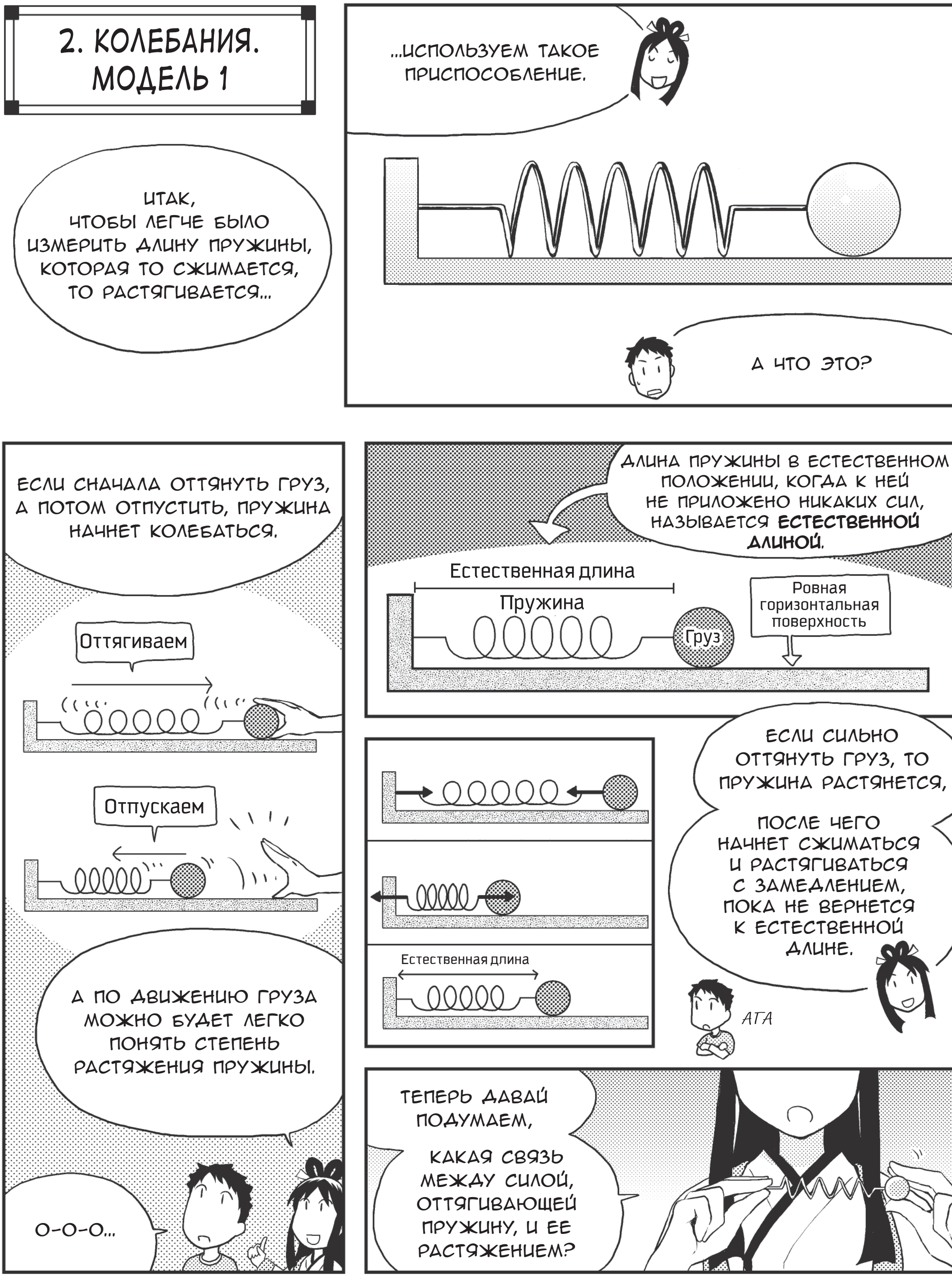

ААА......
ВСЕ, БОЛЬШЕ НЕ МОГУ...
СИЛ НЕТ...
УСТАЛА
ПОЖАЛУЙСТА, ГОСПОЖА БОГИНЯ.
КОГДА ТАК УСТАЕШЬ, НУЖНО ЧЕГО-НИБУДЬ СЛАДЕНЬКОГО СЪЕСТЬ.
О...
О-О-О-О-О....
ГОСПОЖА МИДЗУКИ,
МОЖНО Я СЪЕМ?
ХОРОШО!
ОХ!
ЭТО ТОЖЕ ОЧЕНЬ ВКУСНО! ОТКУДА ЭТИ КЕКСИКИ?

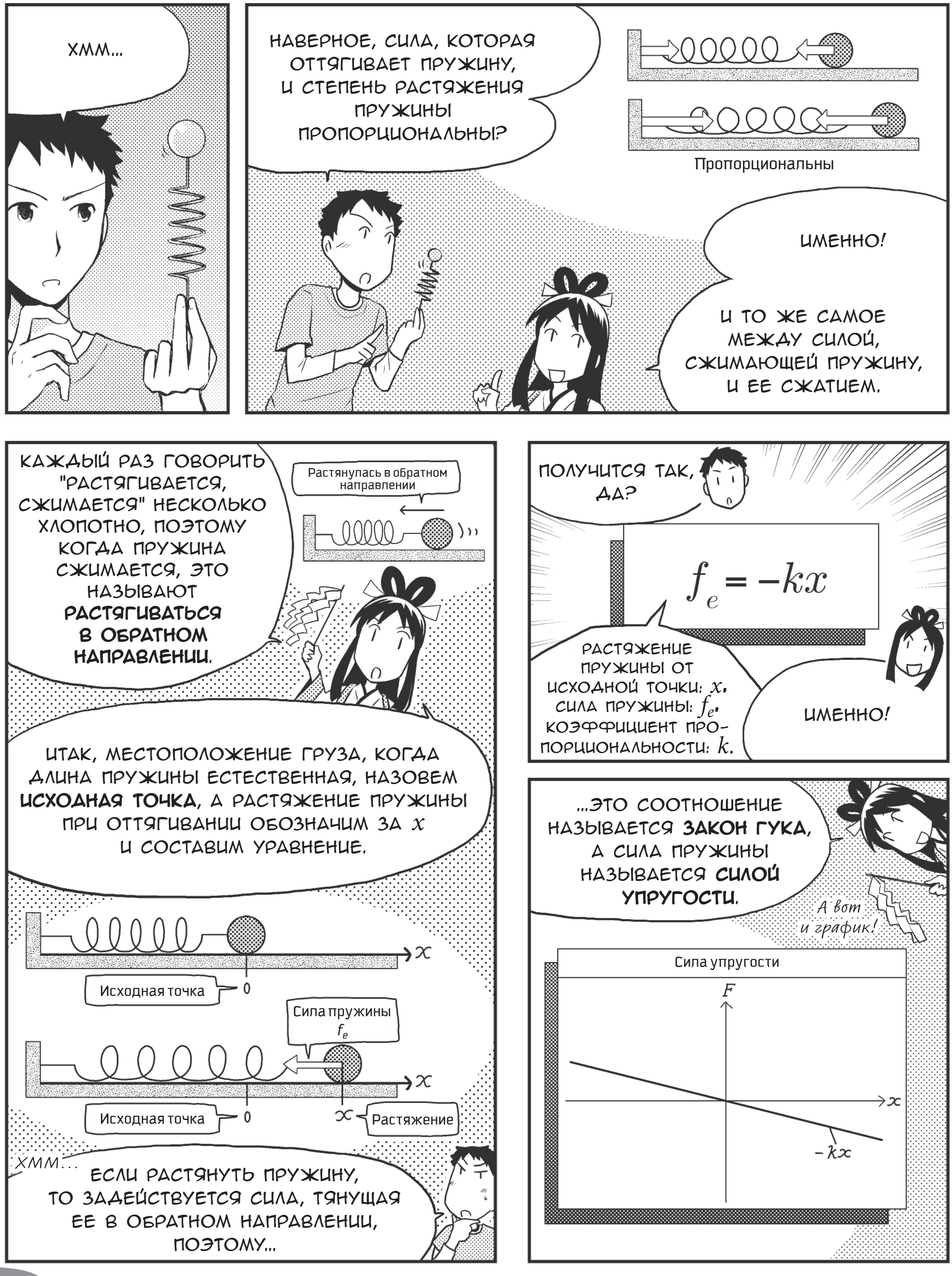

ЭТИ Я САМ СДЕЛАЛ.
ХЕ-ХЕ
В БЛАГОДАРНОСТЬ ЗА ВСЕ.
ЧЕГО!?
ДАИЧИ! ЗДОРОВО!
ТЕПЕРЬ ПОНЯТНО, ПОЧЕМУ ОНИ ТАКИЕ НЕКАЗИСТЫЕ.
ТОГДА НЕ ЕШЬТЕ.
ХММ...
НО НА ВКУС ПРЕКРАСНЫЕ!
НЯМ-НЯМ
ИТАК,
НАЧНЕМ ПОСЛЕДНЕЕ ЗАНЯТИЕ!
БУДЬТЕ ТАК ЛЮБЕЗНЫ!
СЕГОДНЯ РАССМОТРИМ, КАК ПЕРЕНЕСТИ В МИР МАТЕМАТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.
Колебания
Колебания – это когда процесс то возрастает, то убывает
ВСЕ В ЭТОМ МИРЕ СОВЕРШАЕТ КОЛЕБАНИЯ!
ПОЭТОМУ РАЗОБРАТЬСЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЯХ ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНО!
Э-Э-Э...



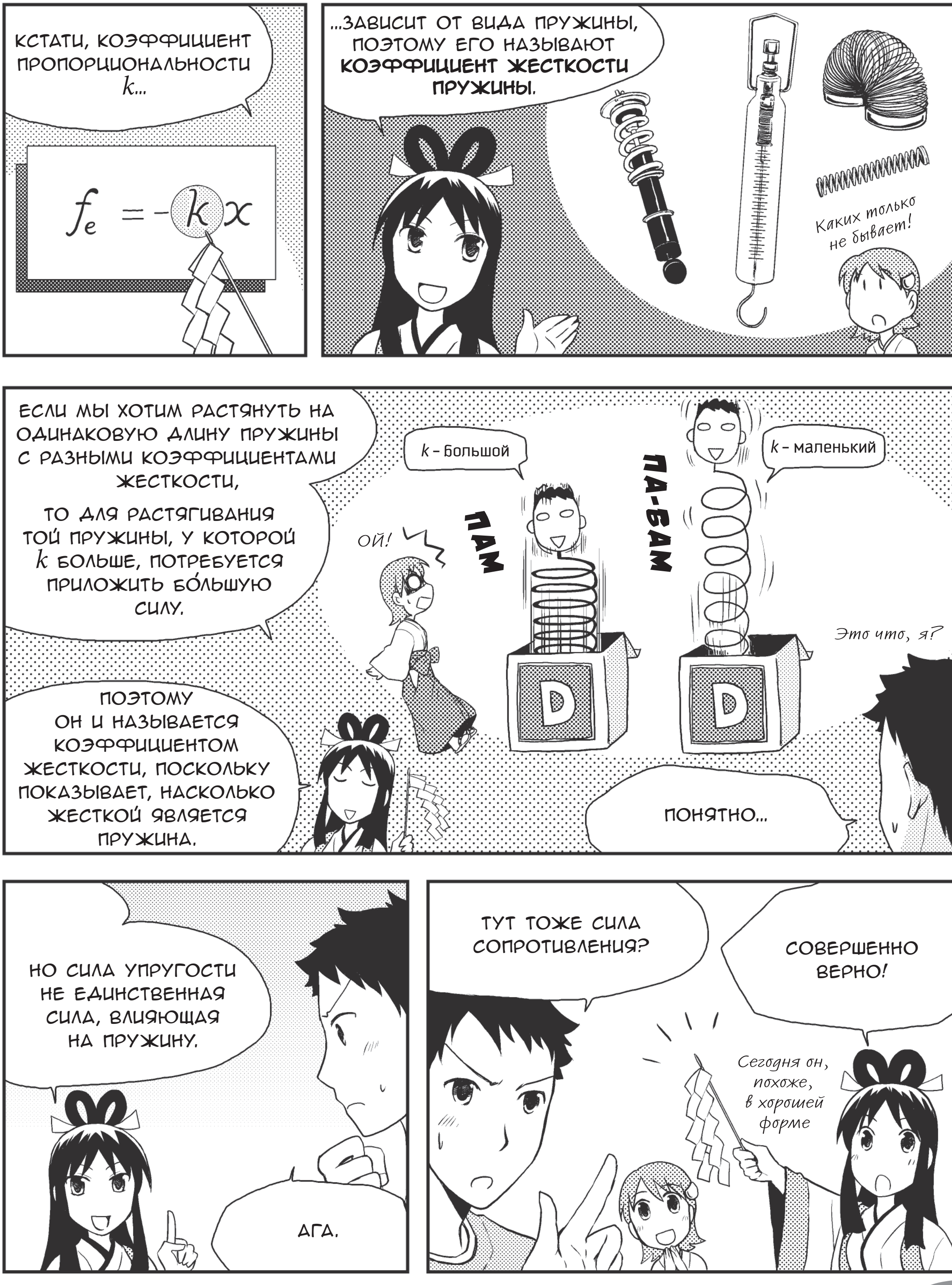
Так, что возьмем для примера?
Предложи ты что-нибудь.
Что-то, что то возрастает, то убывает, да?
....
....
....
....
Не получается...
Так я и думала...
Простите
Да, туго соображаешь...
Легкий и понятный пример – это пружина!
Пружина?
Она то растягивается, то сжимается, то есть колеблется, верно?
Например, на велосипеде благодаря пружине ехать не больно.
Подвеска
Пружина
Велосипедная подвеска, содержащая пружину, амортизирует удары при езде.
Понятно!
Для моделирования колебательных явлений нам понадобятся более сложные **линейные дифференциальные уравнения второго порядка.**
Так что сегодня постарайся как следует!
Есть!

2. Колебания. Модель 1

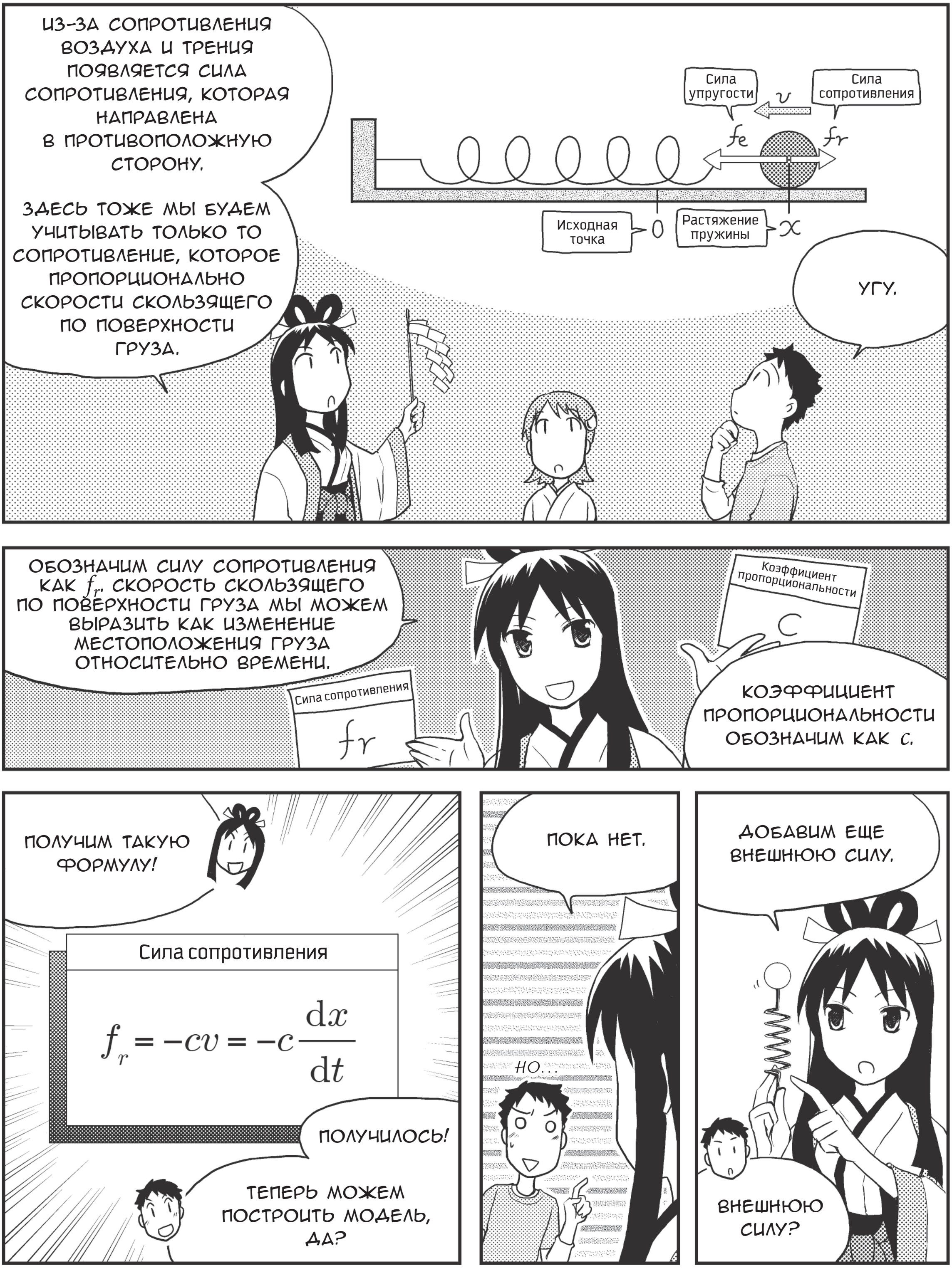


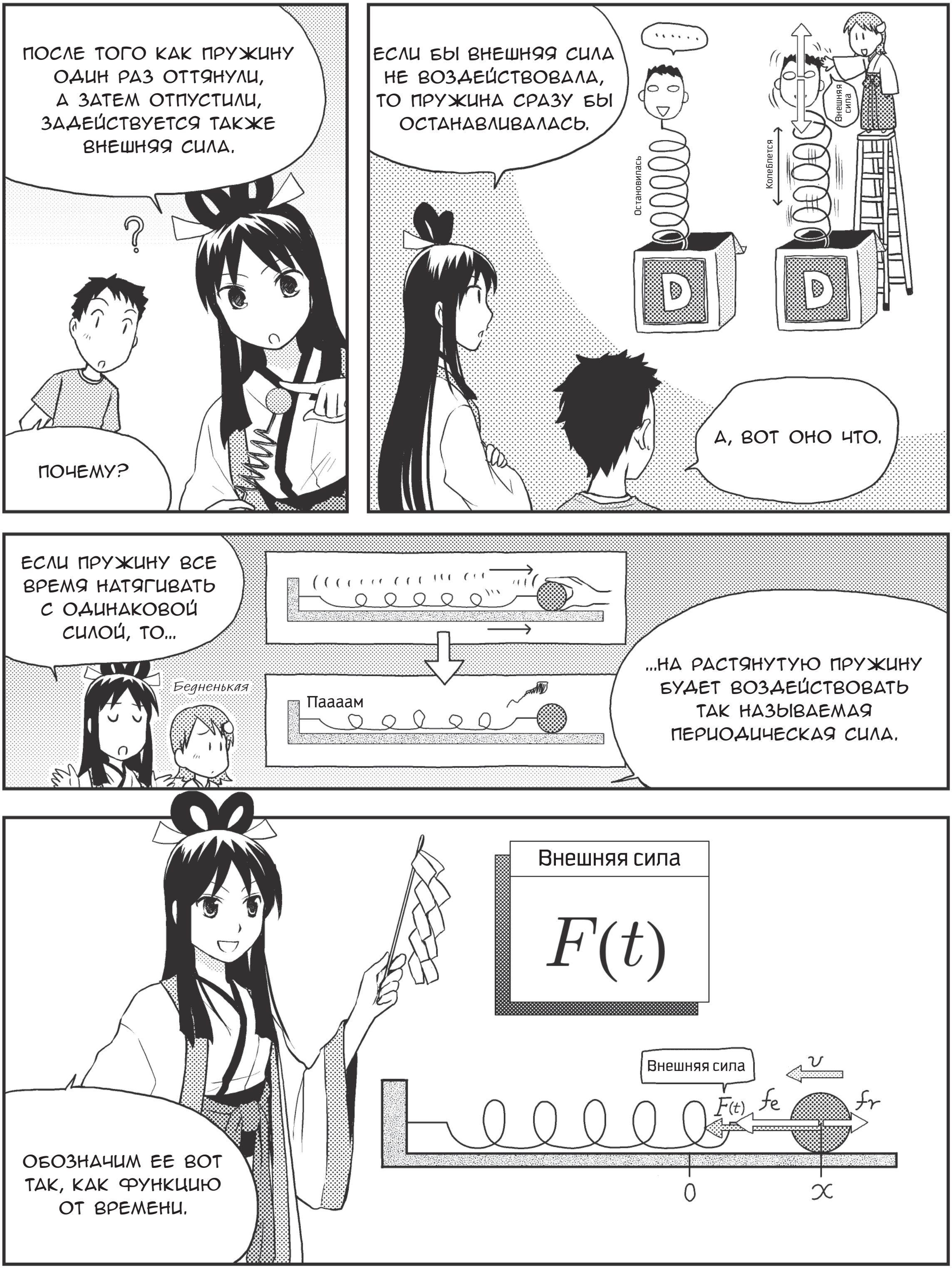


ХММ...
НАВЕРНОЕ, СИЛА, КОТОРАЯ ОТТЯГИВАЕТ ПРУЖИНУ, И СТЕПЕНЬ РАСТЯЖЕНИЯ ПРУЖИНЫ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫ?
Пропорциональны
ИМЕННО!
И ТО ЖЕ САМОЕ МЕЖДУ СИЛОЙ, СЖИМАЮЩЕЙ ПРУЖИНУ, И ЕЕ СЖАТИЕМ.
КАЖДЫЙ РАЗ ГОВОРИТЬ "РАСТЯГИВАЕТСЯ, СЖИМАЕТСЯ" НЕСКОЛЬКО ХЛОПОТНО, ПОЭТОМУ КОГДА ПРУЖИНА СЖИМАЕТСЯ, ЭТО НАЗЫВАЮТ **РАСТЯГИВАТЬСЯ В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ**.
Растянулась в обратном направлении
ИТАК, МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ГРУЗА, КОГДА ДЛИНА ПРУЖИНЫ ЕСТЕСТВЕННАЯ, НАЗОВЕМ **ИСХОДНАЯ ТОЧКА**, А РАСТЯЖЕНИЕ ПРУЖИНЫ ПРИ ОТТЯГИВАНИИ ОБОЗНАЧИМ ЗА x И СОСТАВИМ УРАВНЕНИЕ.
x
Исходная точка
0
Сила пружины f_e
x
Исходная точка
0
x
Растяжение
ХММ...
ЕСЛИ РАСТЯНУТЬ ПРУЖИНУ, ТО ЗАДЕЙСТВУЕТСЯ СИЛА, ТЯНУЩАЯ ЕЕ В ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ, ПОЭТОМУ...
ПОЛУЧИТСЯ ТАК, ДА?
$f_e = -kx$
РАСТЯЖЕНИЕ ПРУЖИНЫ ОТ ИСХОДНОЙ ТОЧКИ: x, СИЛА ПРУЖИНЫ: f_e, КОЭФФИЦИЕНТ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ: k.
ИМЕННО!
...ЭТО СООТНОШЕНИЕ НАЗЫВАЕТСЯ **ЗАКОН ГУКА**, А СИЛА ПРУЖИНЫ НАЗЫВАЕТСЯ **СИЛОЙ УПРУГОСТИ**.
А вот и график!
Сила упругости
F
x
$-kx$

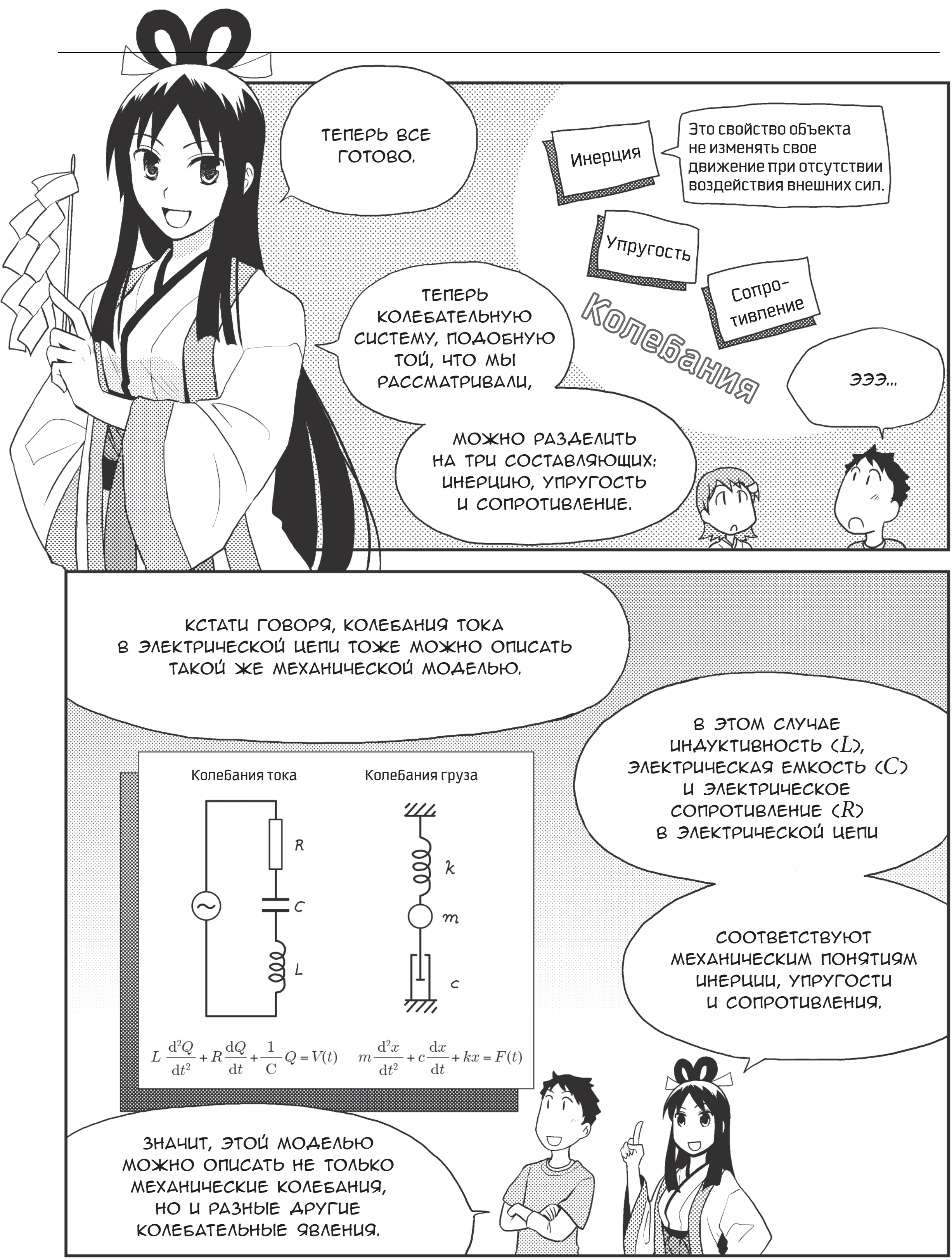


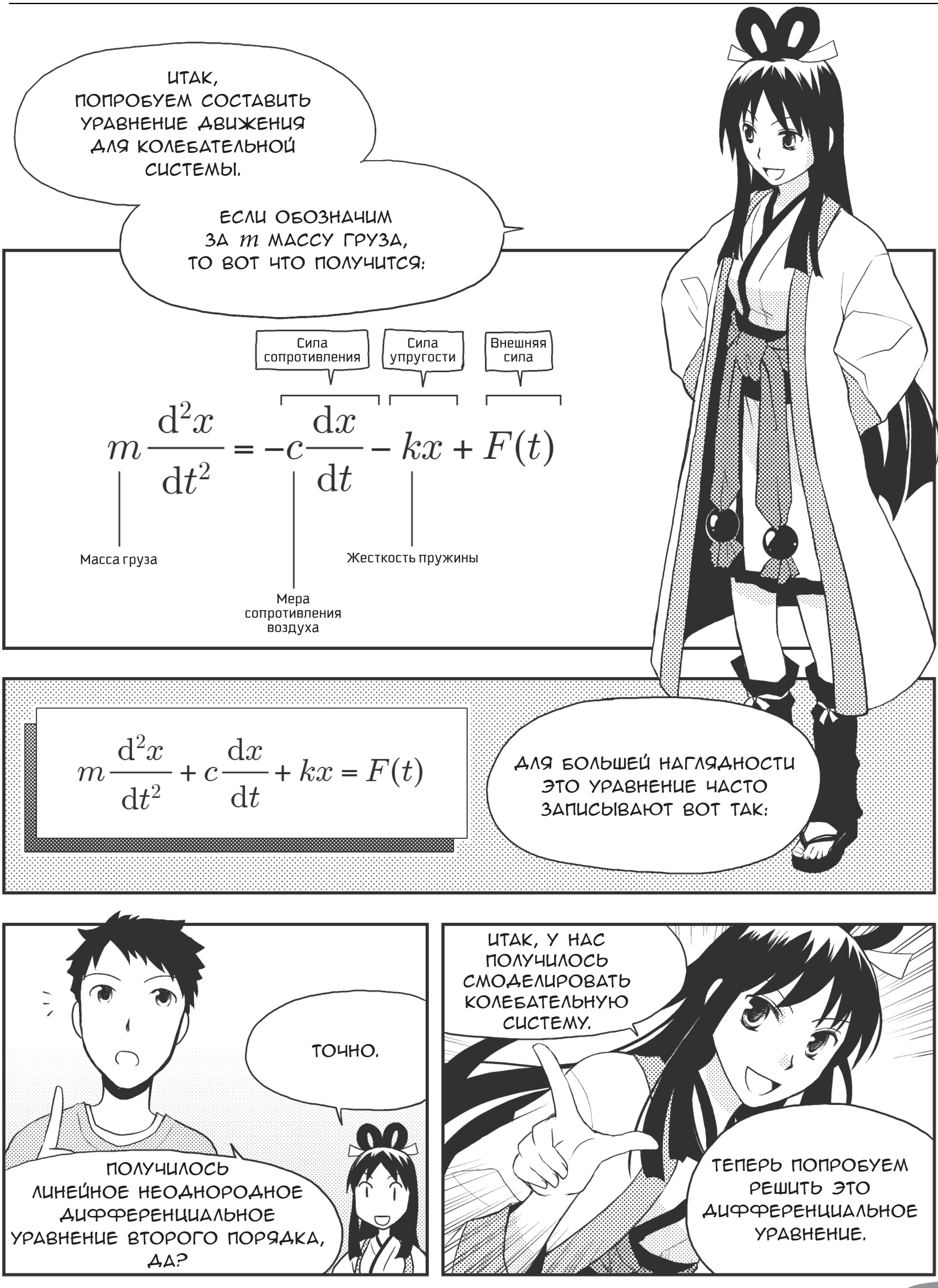
Кстати, коэффициент пропорциональности k...
$f_e = -kx$
...зависит от вида пружины, поэтому его называют **коэффициент жесткости пружины**.
Каких только не бывает!
Если мы хотим растянуть на одинаковую длину пружины с разными коэффициентами жесткости,
то для растягивания той пружины, у которой k больше, потребуется приложить бо́льшую силу.
k – большой
k – маленький
Ой!
Пам
Па-бам
Это что, я?
Поэтому он и называется коэффициентом жесткости, поскольку показывает, насколько жесткой является пружина.
Понятно...
Но сила упругости не единственная сила, влияющая на пружину.
Ага.
Тут тоже сила сопротивления?
Совершенно верно!
Сегодня он, похоже, в хорошей форме


Из-за сопротивления воздуха и трения появляется сила сопротивления, которая направлена в противоположную сторону.
Здесь тоже мы будем учитывать только то сопротивление, которое пропорционально скорости скользящего по поверхности груза.
Сила упругости
Сила сопротивления
v
f_e
f_r
Исходная точка
0
Растяжение пружины
x
Угу.
Обозначим силу сопротивления как f_r. Скорость скользящего по поверхности груза мы можем выразить как изменение местоположения груза относительно времени.
Сила сопротивления
f_r
Коэффициент пропорциональности
c
Коэффициент пропорциональности обозначим как c.
Получим такую формулу!
Сила сопротивления
$$f_r = -cv = -c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
Получилось!
Теперь можем построить модель, да?
Пока нет.
Но...
Добавим еще внешнюю силу.
Внешнюю силу?

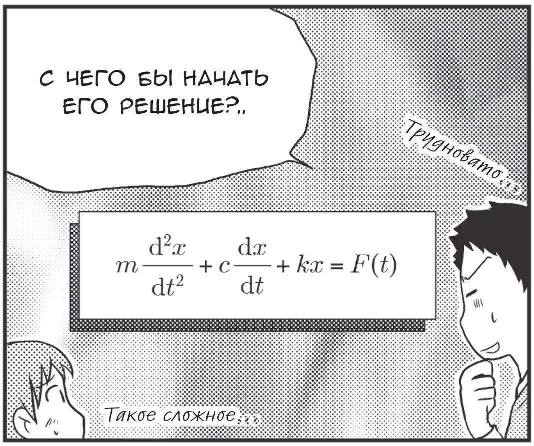


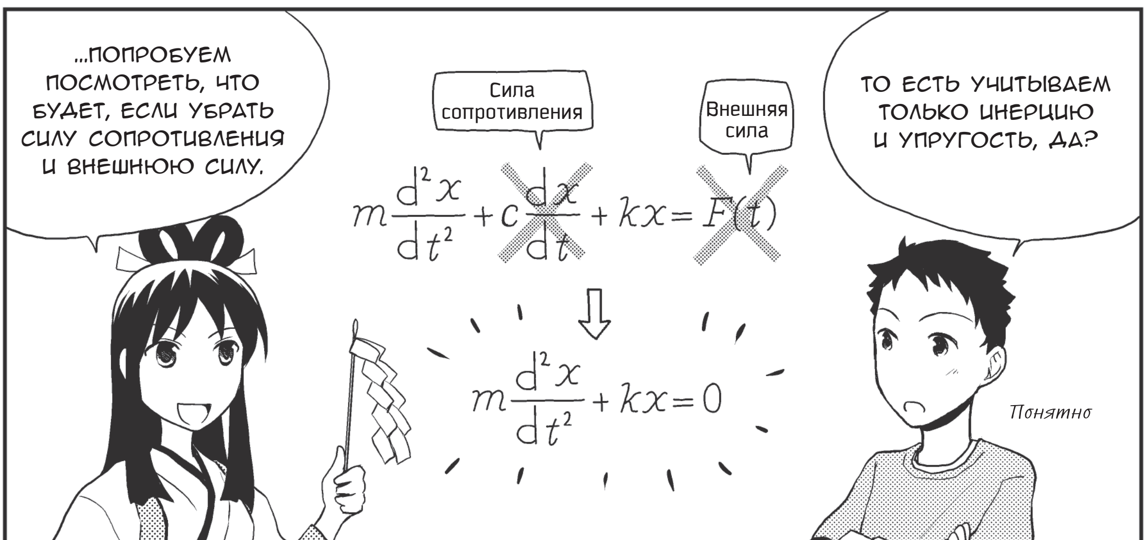
После того как пружину один раз оттянули, а затем отпустили, задействуется также внешняя сила.
?
Почему?
Если бы внешняя сила не воздействовала, то пружина сразу бы останавливалась.
......
Остановилась
Колеблется
Внешняя сила
А, вот оно что.
Если пружину все время натягивать с одинаковой силой, то...
Бедненькая
Пааааам
...на растянутую пружину будет воздействовать так называемая периодическая сила.
Внешняя сила
$F(t)$
Внешняя сила
v
$F(t)$
f_e
f_r
0
x
Обозначим ее вот так, как функцию от времени.

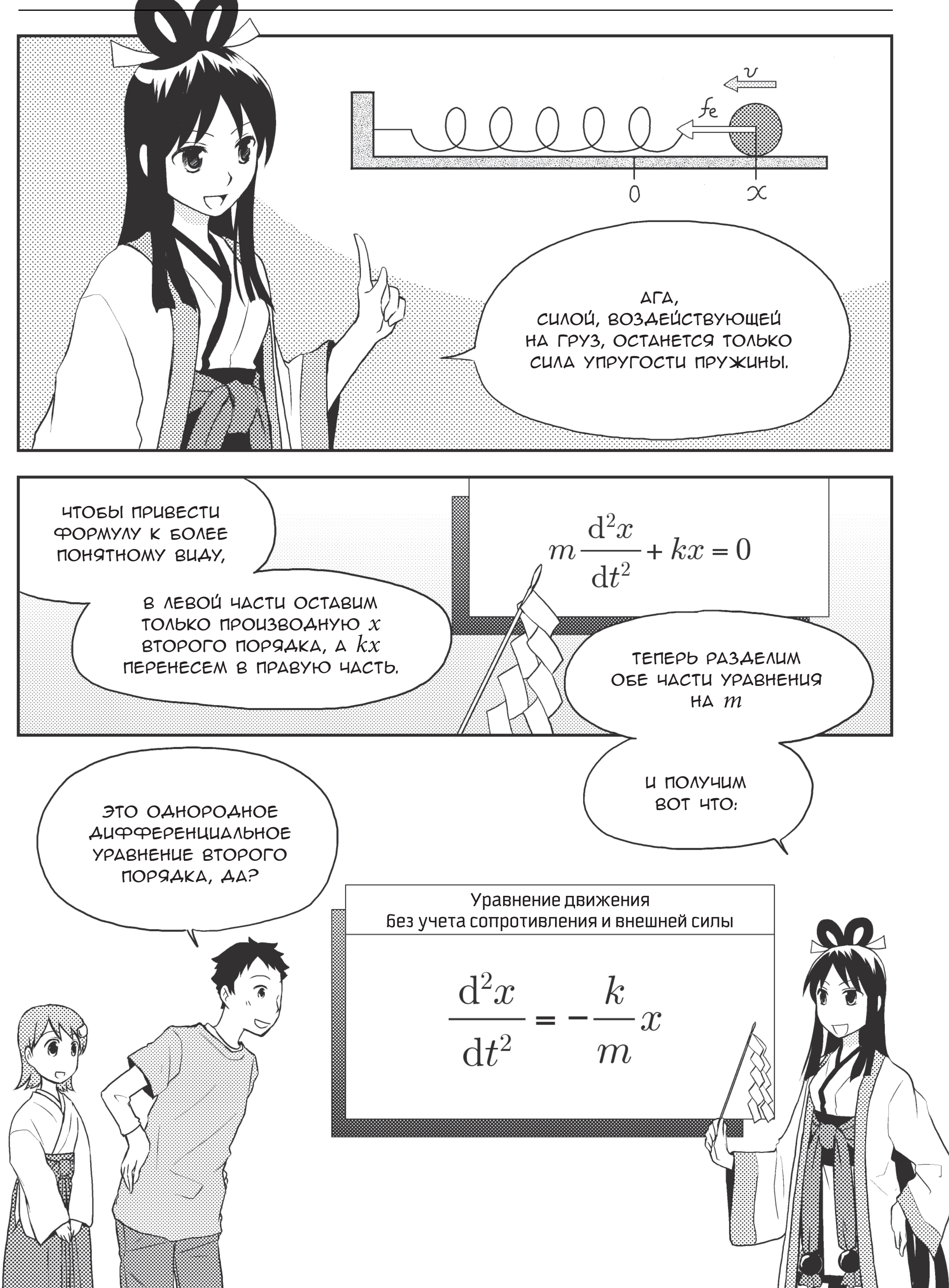

Теперь все готово.
Инерция
Это свойство объекта не изменять свое движение при отсутствии воздействия внешних сил.
Упругость
Сопро-тивление
Колебания
Теперь колебательную систему, подобную той, что мы рассматривали,
можно разделить на три составляющих: инерцию, упругость и сопротивление.
Эээ...
Кстати говоря, колебания тока в электрической цепи тоже можно описать такой же механической моделью.
Колебания тока
Колебания груза
R
C
L
k
m
c
$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=V(t)$
$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$
В этом случае индуктивность (L), электрическая емкость (C) и электрическое сопротивление (R) в электрической цепи
соответствуют механическим понятиям инерции, упругости и сопротивления.
Значит, этой моделью можно описать не только механические колебания, но и разные другие колебательные явления.


Итак, попробуем составить уравнение движения для колебательной системы.
Если обозначим за m массу груза, то вот что получится:
Сила сопротивления
Сила упругости
Внешняя сила
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx + F(t)$$
Масса груза
Мера сопротивления воздуха
Жесткость пружины
Для большей наглядности это уравнение часто записывают вот так:
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t)$$
Получилось линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, да?
Точно.
Итак, у нас получилось смоделировать колебательную систему.
Теперь попробуем решить это дифференциальное уравнение.

3. Колебания. Модель 2. Простые колебания

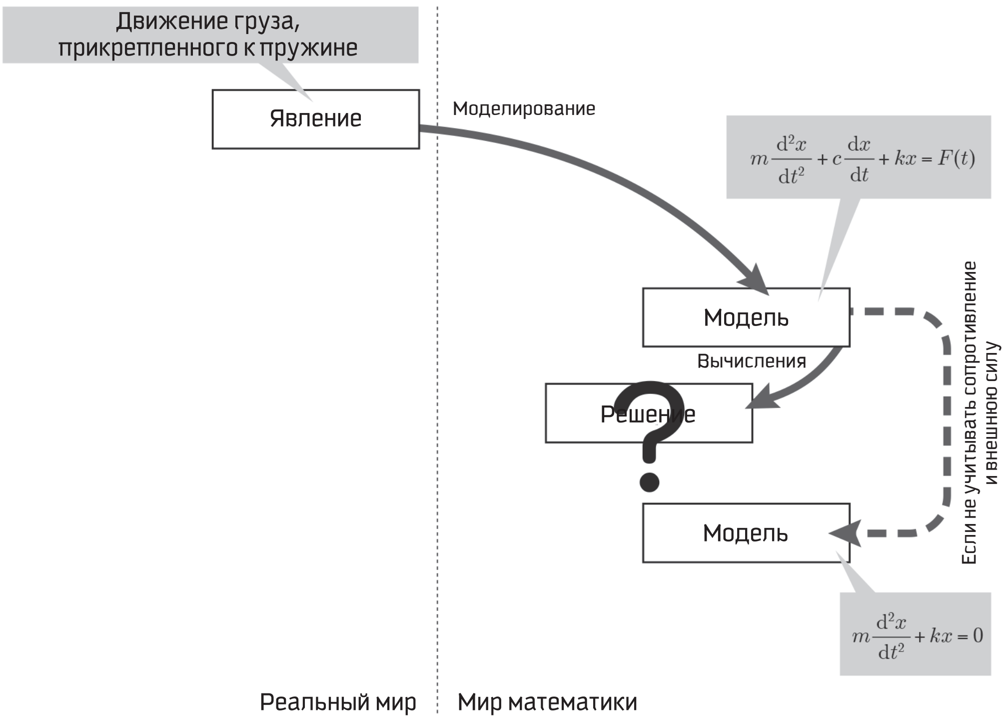






v
f_e
0
x
АГА, СИЛОЙ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ГРУЗ, ОСТАНЕТСЯ ТОЛЬКО СИЛА УПРУГОСТИ ПРУЖИНЫ.
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0$$
ЧТОБЫ ПРИВЕСТИ ФОРМУЛУ К БОЛЕЕ ПОНЯТНОМУ ВИДУ,
В ЛЕВОЙ ЧАСТИ ОСТАВИМ ТОЛЬКО ПРОИЗВОДНУЮ x ВТОРОГО ПОРЯДКА, А kx ПЕРЕНЕСЕМ В ПРАВУЮ ЧАСТЬ.
ТЕПЕРЬ РАЗДЕЛИМ ОБЕ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НА m
И ПОЛУЧИМ ВОТ ЧТО:
ЭТО ОДНОРОДНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДА?
Уравнение движения
без учета сопротивления и внешней силы
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$$

Итак, что мы сейчас сделали? Полученная модель получилась такой сложной, что не понятно, как с ней работать. Поэтому мы упростили явление, опустившись на уровень ниже, и получили другую модель.



Моделирование движения груза, прикрепленного к пружине, без учета сопротивления и внешней силы

Понятно.

Теперь найдем общее решение для ситуации, когда отсутствуют сила сопротивления и внешняя сила. Посмотри внимательно на это дифференциальное уравнение.

Еще раз?

Если посмотреть действительно внимательно, то заметишь, что после двойного дифференцирования x по t мы на выходе получаем снова $-x$, хотя и с добавлением k/m[1].

После двойного дифференцирования возвращается к исходному значению... Где-то такое уже было...

[1] При быстром взгляде этого не заметить.

На стр. 53 мы дифференцировали функцию синуса:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t.$$

Если полученную функцию косинуса продифференцировать снова, то получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t.$$

Что можно записать вот так:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t.$$

То есть после двойного дифференцирования мы вернулись к первоначальной функции. Если умело использовать это свойство тригонометрических функций, то кажется, можно получить решение и нашего уравнения. Однако в нашем уравнении $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -(k/m)x$ есть добавочный элемент k/m, с которым надо что-то сделать. Тут уместно вспомнить одно из основных свойств производных. Если ω – это константа, то:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin\omega t = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = -\omega^2\sin\omega t.$$

Теперь, кажется, что-то может получиться. Если обозначить:

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \tag{5.1}$$

то получается, что:

$$x(t) = \sin\omega t. \tag{5.2}$$

Это является решением уравнения $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -(k/m)x$. Вот и хорошо!
Но подождите! Это не единственное решение, разве не так? Например, если решение (5.2) умножить на константу:

$$x(t) = A\sin\omega t, \tag{5.3}$$

то это тоже будет являться решением уравнения $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -(k/m)x$. Потому что, если подставить это решение в уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A\sin\omega t = -\omega^2 A\sin\omega t,$$

мы можем в этом убедиться. Кроме того, вот формула производной косинуса:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t.$$

И если теперь еще раз продифференцировать полученный в результате синус:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t,$$

получим снова косинус. Это можно переписать как:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = -\cos t.$$

И если B – это константа, то получим, что:

$$x(t) = B\cos\omega t, \tag{5.4}$$

и это тоже будет являться решением уравнения $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -(k/m)x$.
На самом деле общим решением уравнения является линейная комбинация[2] решения (5.3) и решения (5.4):

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{5.5}$$

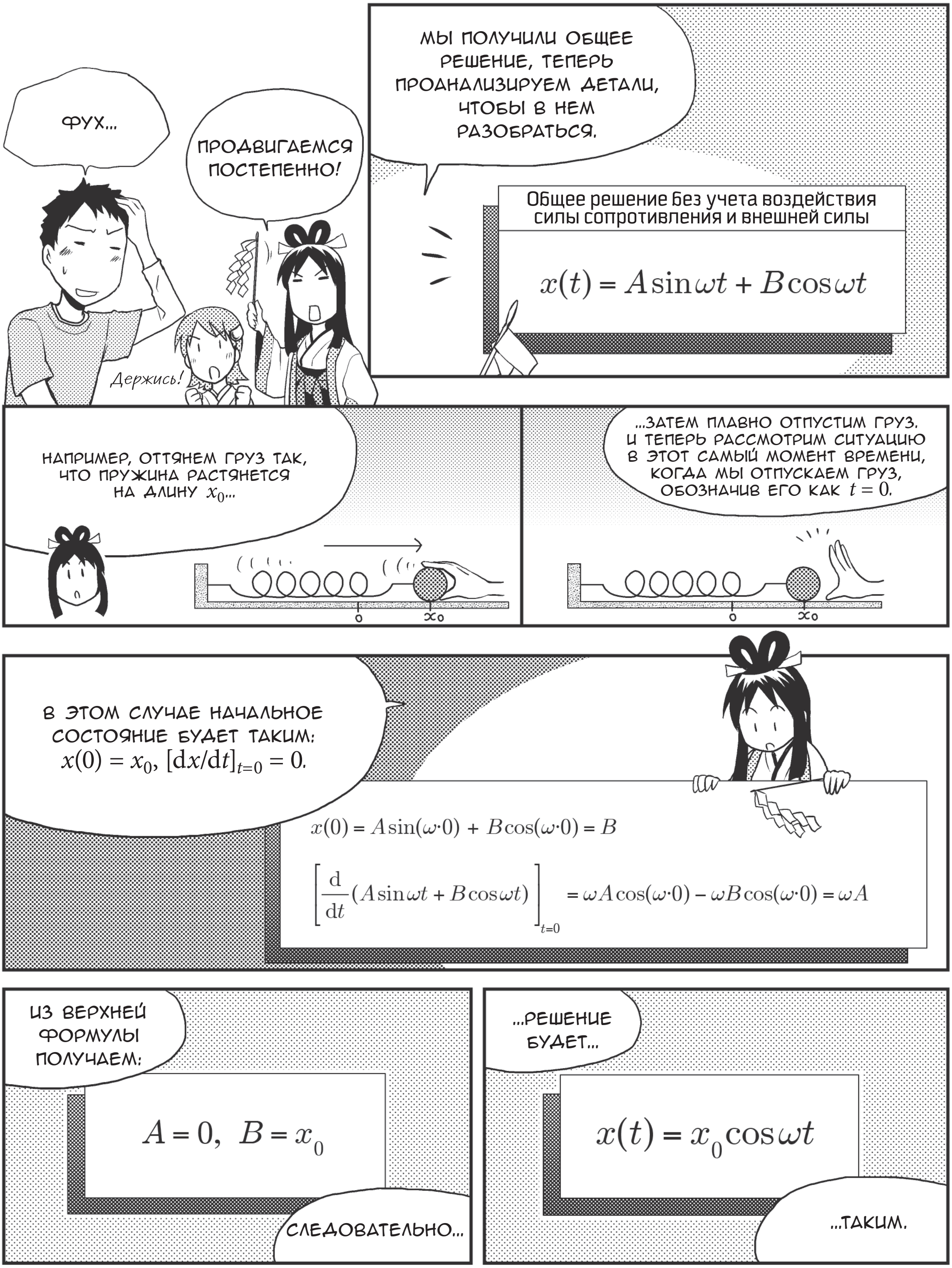
← Общее решение без учета воздействия силы сопротивления и внешней силы

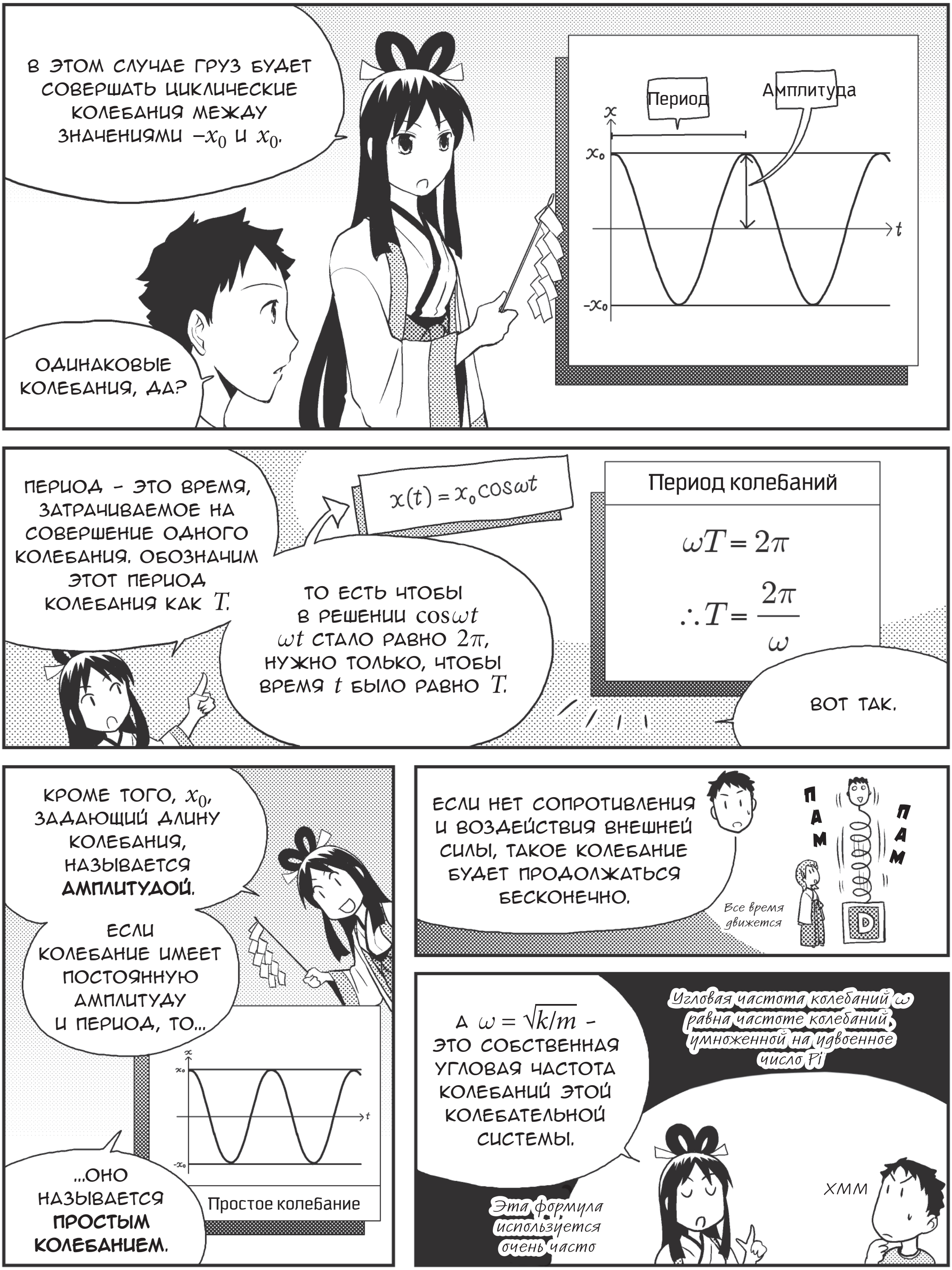
Если общее решение (5.5) дважды продифференцировать по t:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t),$$

то мы убедимся, что оно действительно является решением уравнения.

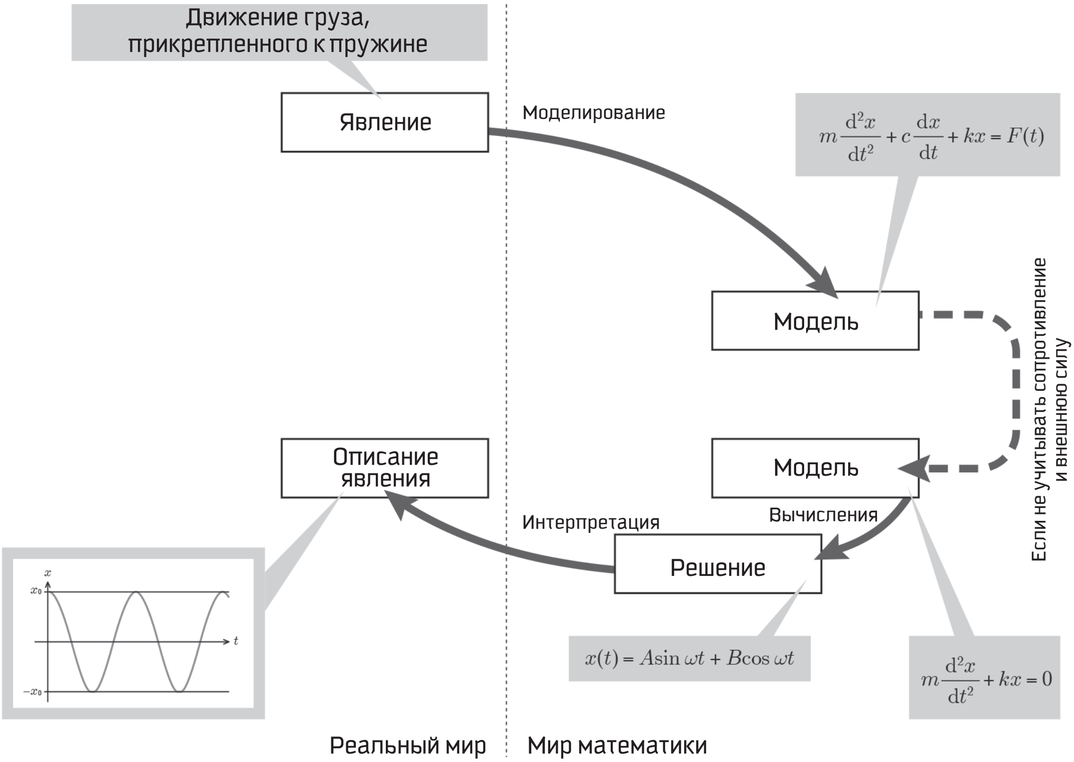
[2] Это сумма элементов, каждый из которых умножается на константу.


Фух...
Продвигаемся постепенно!
Держись!
Мы получили общее решение, теперь проанализируем детали, чтобы в нем разобраться.
Общее решение без учета воздействия силы сопротивления и внешней силы
$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$
Например, оттянем груз так, что пружина растянется на длину x_0...
0
x_0
...затем плавно отпустим груз. И теперь рассмотрим ситуацию в этот самый момент времени, когда мы отпускаем груз, обозначив его как $t = 0$.
0
x_0
В этом случае начальное состояние будет таким: $x(0) = x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0} = 0$.
$x(0) = A\sin(\omega\cdot 0) + B\cos(\omega\cdot 0) = B$
$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)\right]_{t=0} = \omega A\cos(\omega\cdot 0) - \omega B\cos(\omega\cdot 0) = \omega A$
Из верхней формулы получаем:
$A = 0,\ B = x_0$
Следовательно...
...решение будет...
$x(t) = x_0\cos\omega t$
...таким.



В этом случае груз будет совершать циклические колебания между значениями $-x_0$ и x_0.
Период
Амплитуда
x
t
x_0
$-x_0$
Одинаковые колебания, да?
Период – это время, затрачиваемое на совершение одного колебания. Обозначим этот период колебания как T.
$x(t) = x_0 \cos\omega t$
То есть чтобы в решении $\cos\omega t$ ωt стало равно 2π, нужно только, чтобы время t было равно T.
Период колебаний
$\omega T = 2\pi$
$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega}$
Вот так.
Кроме того, x_0, задающий длину колебания, называется **амплитудой**.
Если колебание имеет постоянную амплитуду и период, то...
...оно называется **простым колебанием**.
Простое колебание
Если нет сопротивления и воздействия внешней силы, такое колебание будет продолжаться бесконечно.
ПАМ
ПАМ
Все время движется
А $\omega = \sqrt{k/m}$ – это собственная угловая частота колебаний этой колебательной системы.
Угловая частота колебаний ω равна частоте колебаний, умноженной на удвоенное число Pi
Эта формула используется очень часто
ХММ

Вот эта ситуация.

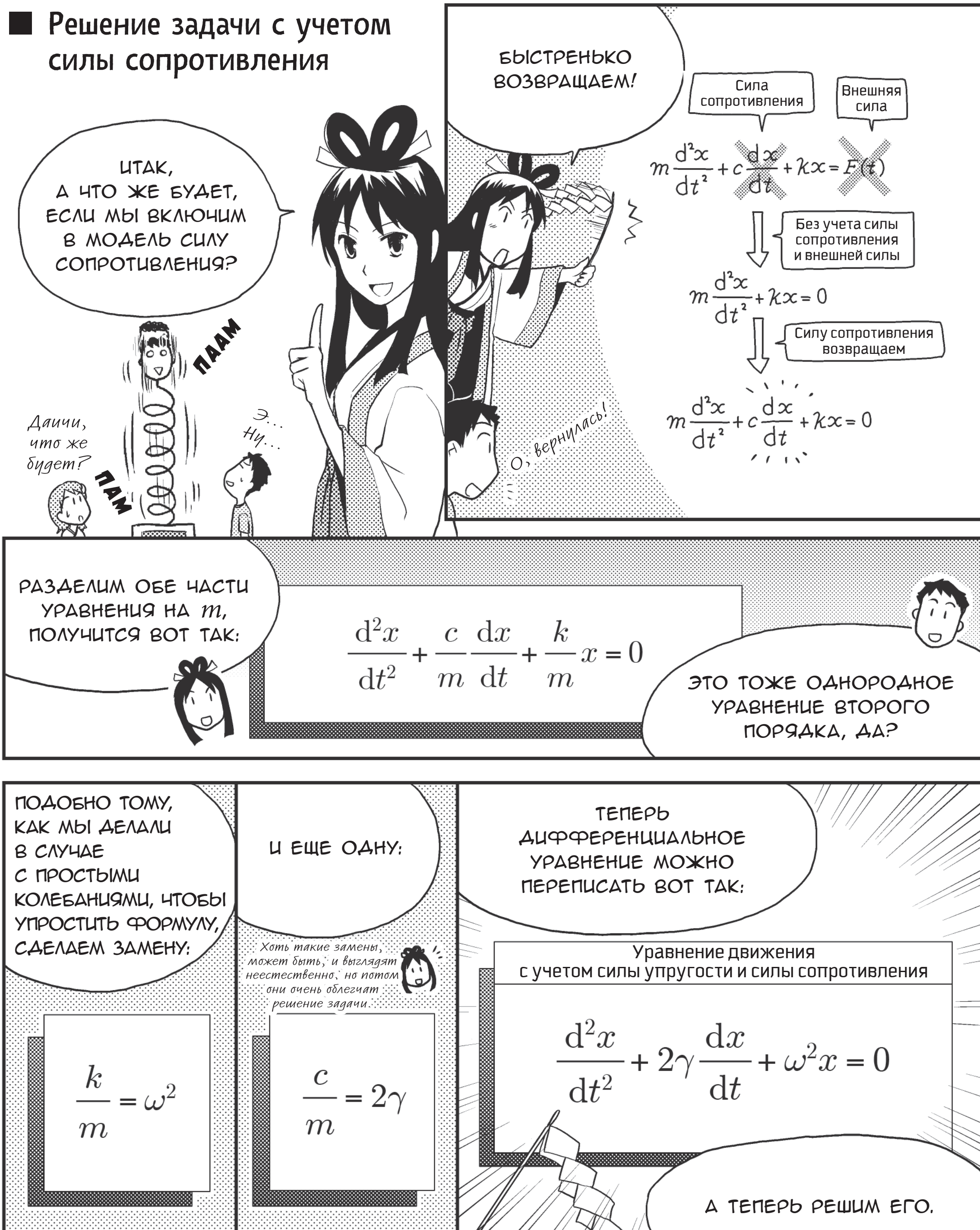


Так, упростив модель, мы получили решение. И хотя в реальной жизни непременно будет воздействие силы сопротивления, данная модель подходит для описания ситуации, когда сила сопротивления очень слабая

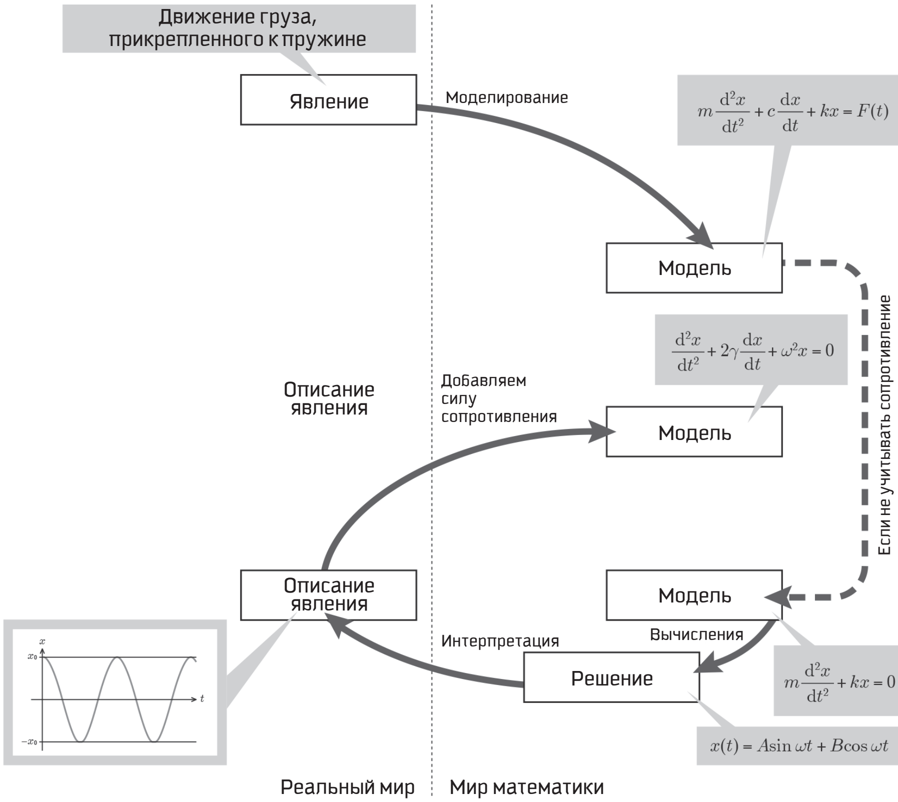
Описание явления движения груза, прикрепленного к пружине, без учета воздействия силы сопротивления и внешней силы

Простые колебания объясняют такие явления, как колебания пружины, в случае когда можно пренебречь сопротивлением (то, что мы рассматривали), или движения маятника с небольшой амплитудой. Кроме того, они являются основой для всех колебательных явлений, поэтому знать их необходимо.

Решение задачи с учетом силы сопротивления



Сейчас наша последовательность действий такая: пройдем цикл моделирования еще раз, добавив к предыдущей простой модели один компонент и немного ее усложнив.



Моделирование движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия силы сопротивления

Итак, попробуем найти общее решения для случая, когда не учтено только воздействие внешней силы. Здесь тоже внимательно посмотрим на полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0.$$

Хорошо.

Если посмотреть внимательно, то видно, что сумма x, производной от x и второй производной x, равна нулю[3]. То есть функция $x(t)$ должна быть такой, вид которой не изменяется при дифференцировании.

[3] Так как мы уже делали такое в случае с простыми колебаниями, вы, должно быть, заметили эту особенность быстро.

Функция, которая не меняется при дифференцировании... Где-то такое уже было...

Это было на стр. 53. Если посмотреть на производную экспоненциальной функции:

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t,$$

то очевидно, что эта функция не изменяется при дифференцировании. Если умело использовать это свойство экспоненциальной функции, можно попробовать решить дифференциальное уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$

Если просто дифференцировать функцию e^t по t, не появится никаких коэффициентов. Сколько раз ни дифференцируй, функция не изменится. Однако в дифференциальном уравнении $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ каждый компонент умножается на коэффициент. Поэтому, чтобы решить уравнение, применим одну хитрость. Исходя из основных свойств производных (см. стр. 53)[4], если λ – это константа, то:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t},$$

то есть при многократном дифференцировании получим вот что:

$$\frac{d^n}{dt^n}e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}.$$

Появился коэффициент, теперь как-то можем использовать это в нашем дифференциальном уравнении, да?

Тогда такое решение дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$:

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad \leftarrow \text{Допустимое решение} \tag{5.6}$$

будет допустимым. Теперь попробуем определить значение константы λ, удовлетворяющей условиям уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$

Подставим решение (5.6) в уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + 2\gamma\frac{d}{dt}e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Продифференцируем:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Вынесем $e^{\lambda t}$ за скобки:

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0.$$

[4] Дифференцирование сложных функций.

Так как $e^{\lambda t}$ никогда не может быть равным нулю[5], значит, из условия уравнения (5.7) следует, что должно выполняться такое равенство:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0. \tag{5.8}$$

Получилось квадратное уравнение относительно λ.

Решение этого алгебраического уравнения[6] будет таким[7]:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},\ \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}. \tag{5.9}$$

А значит, что двум решениям (5.9) алгебраического уравнения (5.8) будут соответствовать следующие два решения дифференциального уравнения $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$:

$$x_1 = e^{\lambda_1 t},\ x_2 = e^{\lambda_1 t}. \qquad \leftarrow \text{Решения дифференциального уравнения} \tag{5.10}$$

Итак, мы получили решения.

Однако эти решения не содержат произвольной постоянной, а значит, они не являются общими решениями. Но мы уже знаем, что нужно делать в таком случае.

Метод вариации произвольных постоянных, да?

Да. Чтобы получить общее решение, решение (5.10) умножим на функцию $c_1(t)$ от t:

$$x(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t}. \qquad \leftarrow \text{Решение с допустимым коэффициентом} \tag{5.11}$$

Теперь применим метод вариации произвольных постоянных. Продифференцируем (5.11) по t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\frac{\mathrm{d}e^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t}; \\
\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}e^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t} + \lambda_1\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\lambda_1\frac{\mathrm{d}e^{\lambda_1 t}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}.
\end{aligned}$$

Подставим результаты в дифференциальное уравнение $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$:

---

[5] График функции не пересекает ось x.

[6] Общая формула решения квадратного уравнения: $x = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

[7] Вы заметили? Решения получились такими простыми благодаря тому, что перед коэффициентом γ стоит 2.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 c_1(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 \frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}\right)$$
$$+ 2\gamma\left(\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}e^{\lambda_1 t} + c_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\right) + \omega^2 c_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Вынесем $e^{\lambda_1 t}$ за скобки:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2 c_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2(\lambda_1 + \gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} + (\lambda_1^2 + 2\gamma\lambda_1 + \omega^2)c_1(t)\right\}e^{\lambda_1 t} = 0. \tag{5.12}$$

Не надо пугаться сложного вида. Здесь тоже, так как $e^{\lambda_1 t}$ не может быть равно нулю, то чтобы выполнялось равенство (5.12), необходимо, чтобы:

$$\frac{\mathrm{d}^2 c_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2(\lambda_1 + \gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} + (\lambda_1^2 + 2\gamma\lambda_1 + \omega^2)c_1(t) = 0.$$

Более того, из формулы (5.8) следует, что $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$, поэтому:

$$\frac{\mathrm{d}^2 c_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2(\lambda_1 + \gamma)\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Умножим на $e^{2(\lambda_1+\gamma)t}$ обе части уравнения[8] и преобразуем его:

$$e^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}^2 c_1(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2(\lambda_1 + \gamma)e^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t} = 0;$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{2(\lambda_1+\gamma)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Теперь стало гораздо яснее. Более того, из решения квадратного уравнения (5.9) следует:

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Если же сложить λ_1 и λ_2, получим:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) + \left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\right) = -2\gamma.$$

Если теперь использовать это соотношение, получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Теперь проинтегрируем обе части по t. Тогда если C – произвольная постоянная, то получается:

[8] Выглядит несколько технично, но это часто используемый метод.

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\frac{\mathrm{d}c_1(t)}{\mathrm{d}t}=C.$$

Выведем отсюда функцию $c_1(t)$. Тогда если α – интегральная константа, то:

$$c_1(t)=C\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\mathrm{d}t+\alpha. \tag{5.12}$$

Теперь нужно рассмотреть по отдельности две ситуации, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ и когда λ_1 и λ_2 разные.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, в этом случае $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} = 1$, поэтому функция (5.13) будет выглядеть так:

$$c_1(t)=C\int \mathrm{d}t+\alpha. \tag{5.13}$$

Решив интеграл, получим:

$$c_1(t)=Ct+\alpha.$$

Теперь для получения общего решения дифференциального уравнения $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0$ подставим значение функции $c_1(t)$ в решение (5.11):

$$x(t)=(Ct+\alpha)e^{\lambda_1 t}.$$

Однако так как решения квадратного уравнения (5.9):

$$\lambda_1=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2},\quad \lambda_2=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2},$$

то при $\lambda_1 = \lambda_2$ получим, что:

$$\begin{aligned}-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}&=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2};\\ \sqrt{\gamma^2-\omega^2}&=0;\\ &\therefore \omega^2=\gamma^2.\end{aligned}$$

А следовательно:

$$\lambda_1=\lambda_2=-\gamma.$$

В итоге, если константу C заменить на β, общее решение будет таким:

$x(t)=(\alpha+\beta t)e^{-\gamma t}$, ← Общее решение, при условии когда $\omega^2 = \gamma^2$

где α и β – произвольные константы.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Так как функция (5.13) содержит интеграл экспоненциальной функции, то, решив интеграл, получим:

$$c_1(t) = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha.$$

Исходя из решений квадратного уравнения (5.9):

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то и $\omega^2 \neq \gamma^2$, значит, знак подкоренного выражения $\gamma^2 - \omega^2$ будет зависить от того, какое из условий выполняется:

$$\omega^2 > \gamma^2, \quad \omega^2 < \gamma^2.$$

То есть нам нужно рассмотреть по отдельности обе ситуации.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\omega^2 > \gamma^2$. В этом случае в решениях квадратного уравнения (5.9)

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

подкоренное выражение будет отрицательным, а значит, решение будет комплексным числом. Тогда если i – мнимая единица, то можно записать так:

$$\lambda_1 = -\gamma + i\Omega, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\Omega,$$
$$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

А значит, общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, будет таким:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}. \qquad \leftarrow \text{Общее решение при условии, когда } \omega^2 > \gamma^2$$

А что же будет, если $\omega^2 < \gamma^2$. В этом случае решения квадратного уравнения (5.9)

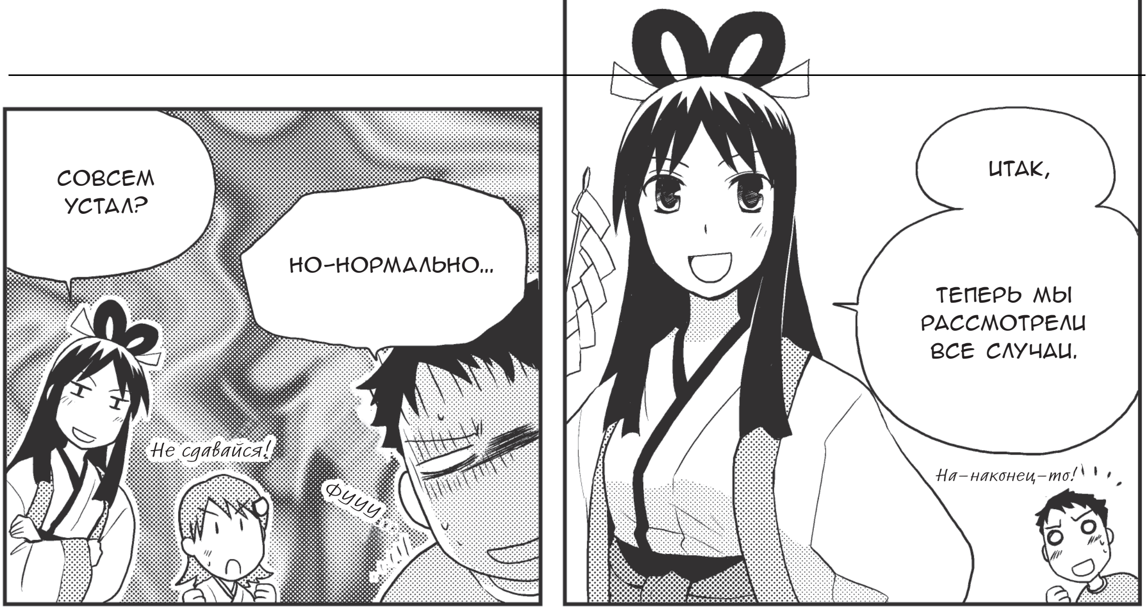
$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

будут обычными числами, и записать их можно так:

$$\lambda_1 = -\gamma + \Gamma, \quad \lambda_1 = -\gamma - \Gamma,$$
$$\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

А значит, общее решение при условии, что α и β – произвольные постоянные, будет таким:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}. \qquad \leftarrow \text{Общее решение при условии, когда } \omega^2 < \gamma^2$$



$$\omega^2 > \gamma^2 : x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}, \ \ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$\omega^2 = \gamma^2 : x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}$$

$$\omega^2 < \gamma^2 : x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}, \ \ \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

■ Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 1 (затухающие колебания)

В этом случае общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Если разделим экспоненту на действительную и комплексную части, то получим вот что:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(\alpha e^{i\Omega t} + \beta e^{-i\Omega t}). \tag{5.15}$$

Однако если к выражению в скобках общего решения (5.15) применить формулу Эйлера[9]

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$,

то получим:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\{\alpha(\cos\Omega t + i\sin\Omega t) + \beta(\cos\Omega t - i\sin\Omega t)\}; \\ &= e^{-\gamma t}\{(\alpha + \beta)\cos\Omega t + i(\alpha - \beta)\sin\Omega t\}; \\ &= e^{-\gamma t}(\alpha\cos\Omega t + \beta\sin\Omega t), \end{aligned} \tag{5.16}$$

где мы обозначили $a = \alpha + \beta$, $b = i(\alpha - \beta)$.

Это решение похоже на общее решение для простых колебаний с циклом $2\pi/\omega$, только цикл здесь $2\pi/\Omega$ и решение умножено на экспоненциальную функцию $e^{-\gamma t}$. Какие же колебания описываются такой функцией?

Здесь, так же как в случае с простыми колебаниями, оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0. В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0} = 0$, тогда из формулы (5.16) следует:

$$x(0) = e^{-\gamma 0}\{\alpha\cos(\Omega\cdot 0) + \beta\sin(\Omega\cdot 0)\} = a = x_0. \tag{5.17}$$

---

[9] На самом деле это определение было введено, чтобы расширить область использования экспоненциальных функций также на те случаи, когда показатель степени – комплексное число. Но это уже совсем другая история...

Учитывая, что $a = x_0$, продифференцируем уравнение (5.16) по t:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\gamma e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + e^{-\gamma t}(-a\Omega\sin\Omega t + b\Omega\cos\Omega t);\\ &= e^{-\gamma t}\{(-\gamma a + b\Omega)\cos\Omega t - (\gamma b + a\Omega)\sin\Omega t\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} &= e^{-\gamma\cdot 0}\{(-\gamma a + b\Omega)\cos(\Omega\cdot 0) - (-\gamma b + a\Omega)\sin(\Omega\cdot 0)\};\\ &= -\gamma a + b\Omega = 0; \\ &\therefore b = \frac{\gamma}{\Omega}x_0.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Из формул (5.17) и (5.18) получается искомое решение:

$$x(t) = e^{-\gamma t}x_0\left(\cos\Omega t + \frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right).$$

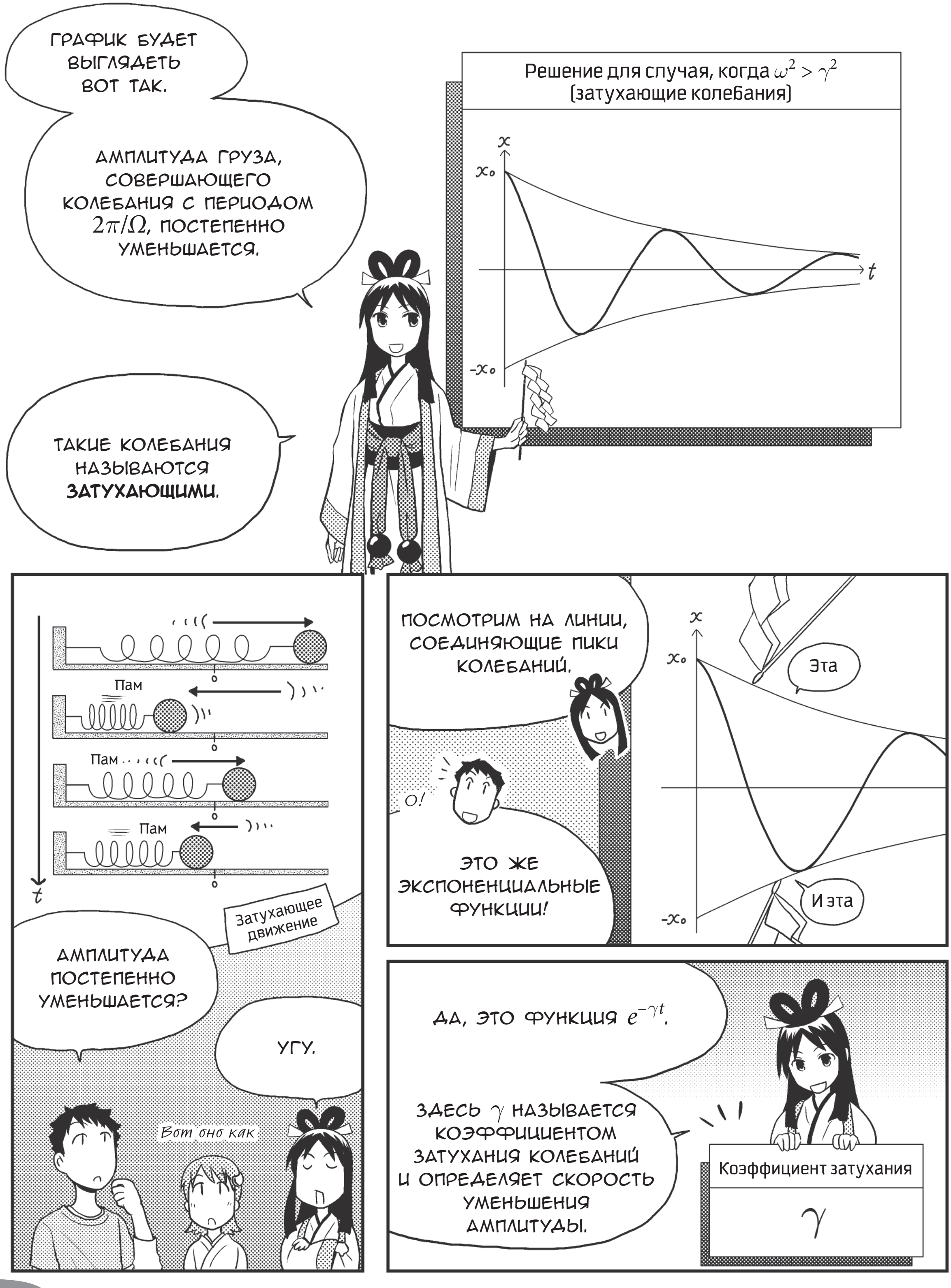
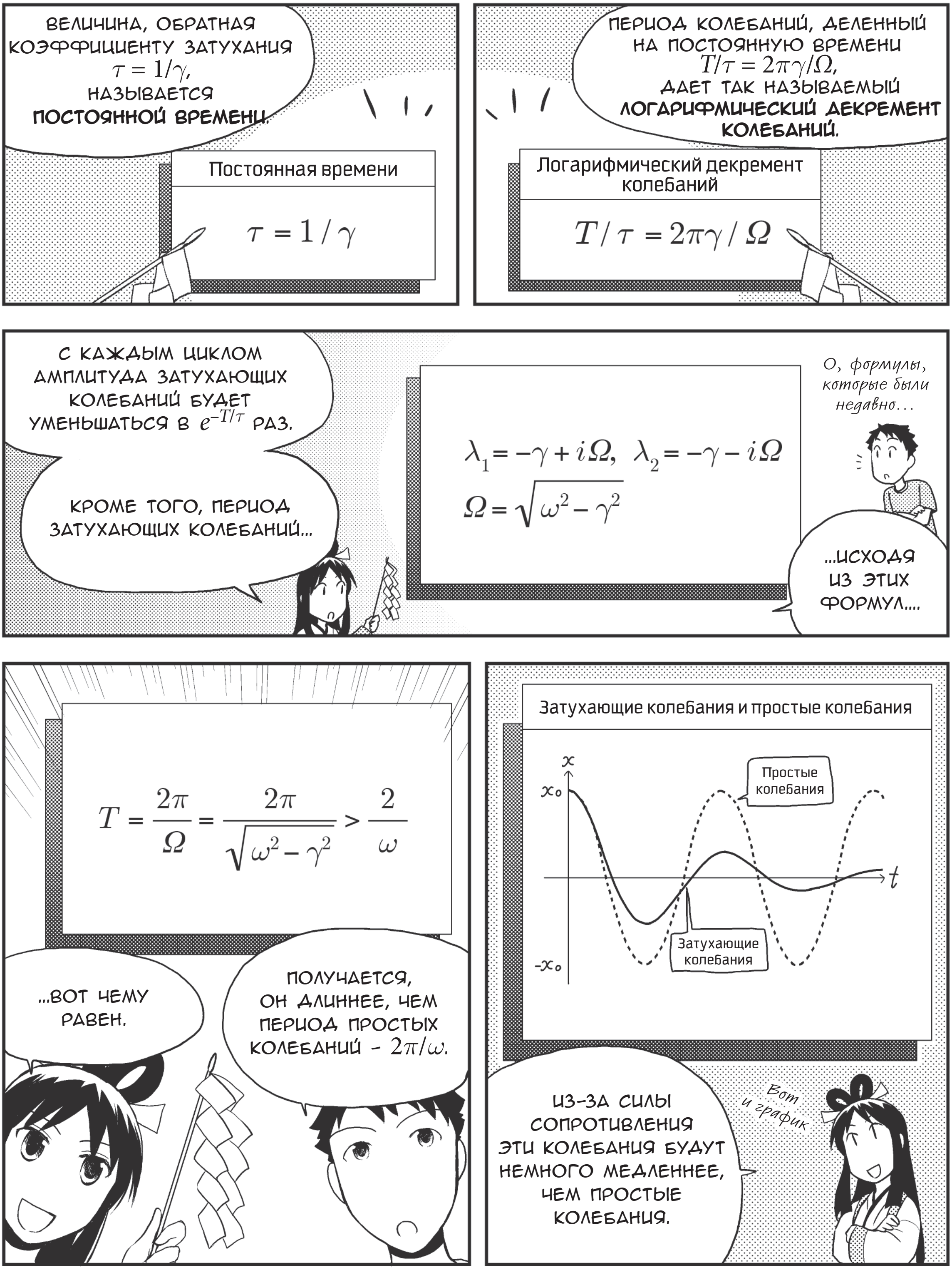
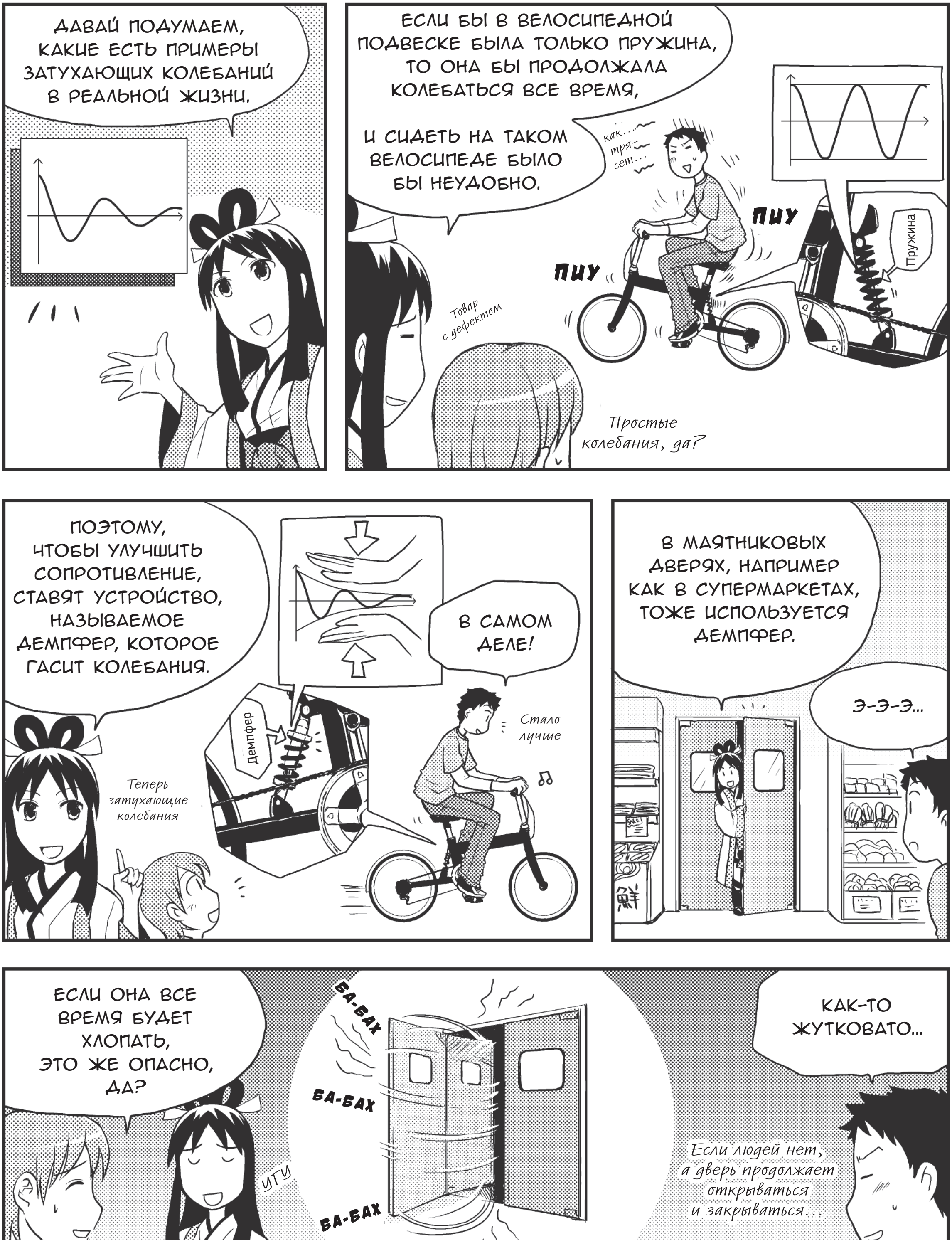


График будет выглядеть вот так.
Амплитуда груза, совершающего колебания с периодом $2\pi/\Omega$, постепенно уменьшается.
Решение для случая, когда $\omega^2 > \gamma^2$ (затухающие колебания)
x
x_0
t
$-x_0$
Такие колебания называются **затухающими**.
Пам
Пам
Пам
t
Затухающее движение
Амплитуда постепенно уменьшается?
Угу.
Вот оно как
Посмотрим на линии, соединяющие пики колебаний.
x
x_0
Эта
О!
Это же экспоненциальные функции!
И эта
$-x_0$
Да, это функция $e^{-\gamma t}$.
Здесь γ называется коэффициентом затухания колебаний и определяет скорость уменьшения амплитуды.
Коэффициент затухания
γ



Величина, обратная коэффициенту затухания $\tau = 1/\gamma$, называется **постоянной времени**.
Постоянная времени
$\tau = 1/\gamma$
Период колебаний, деленный на постоянную времени $T/\tau = 2\pi\gamma/\Omega$, дает так называемый **логарифмический декремент колебаний**.
Логарифмический декремент колебаний
$T/\tau = 2\pi\gamma/\Omega$
С каждым циклом амплитуда затухающих колебаний будет уменьшаться в $e^{-T/\tau}$ раз.
Кроме того, период затухающих колебаний...
$\lambda_1 = -\gamma + i\Omega,\ \lambda_2 = -\gamma - i\Omega$
$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$
О, формулы, которые были недавно...
...исходя из этих формул....
$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} > \frac{2}{\omega}$
...вот чему равен.
Получается, он длиннее, чем период простых колебаний – $2\pi/\omega$.
Затухающие колебания и простые колебания
x
x_0
$-x_0$
t
Простые колебания
Затухающие колебания
Из-за силы сопротивления эти колебания будут немного медленнее, чем простые колебания.
Вот и график


Давай подумаем, какие есть примеры затухающих колебаний в реальной жизни.
Если бы в велосипедной подвеске была только пружина, то она бы продолжала колебаться все время,
и сидеть на таком велосипеде было бы неудобно.
как... тря-сет...
ПИУ
ПИУ
Пружина
Товар с дефектом
Простые колебания, да?
Поэтому, чтобы улучшить сопротивление, ставят устройство, называемое демпфер, которое гасит колебания.
В самом деле!
Демпфер
Стало лучше
Теперь затухающие колебания
В маятниковых дверях, например как в супермаркетах, тоже используется демпфер.
Э-Э-Э...
Если она все время будет хлопать, это же опасно, да?
БА-БАХ
БА-БАХ
БА-БАХ
Угу
Как-то жутковато...
Если людей нет, а дверь продолжает открываться и закрываться...

Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 2 (сильное затухание)

Далее рассмотрим ситуацию, когда $\omega^2 < \gamma^2$.

В этом случае общее решение, при условии что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t},\ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}. \tag{5.19}$$

Если разделим экспоненту на две части, то получим:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t} + \beta e^{-\Gamma t}). \tag{5.20}$$

Посмотрев на эту формулу, нельзя найти элемент, относящийся непосредственно к колебаниям[10]. Какое же действие описывает это решение?

Здесь, как и раньше, оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0. В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0} = 0$, тогда из общего решения (5.20) следует:

$$x(0) = e^{-\gamma \cdot 0}(\alpha e^{\Gamma \cdot 0} + \beta e^{-\Gamma \cdot 0}) = \alpha + \beta = x_0. \tag{5.21}$$

Продифференицируем общее решение (5.20) по t:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\gamma e^{-\gamma t}(\alpha e^{\Gamma t} + \beta e^{-\Gamma t}) + e^{-\gamma t}(\alpha \Gamma e^{\Gamma t} - \beta \Gamma e^{-\Gamma t});$$
$$= e^{-\gamma t}\{(\Gamma - \gamma)\alpha e^{\Gamma t} - (\Gamma + \gamma)\beta e^{-\Gamma t}\},$$

следовательно, вот что получится:

$$\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} = e^{-\gamma \cdot 0}\{(\Gamma - \gamma)\alpha e^{\Gamma \cdot 0} - (\Gamma + \gamma)\beta e^{-\Gamma \cdot 0}) = 0; \tag{5.17}$$
$$\therefore (\Gamma - \gamma)\alpha - (\Gamma + \gamma)\beta = 0.$$

[10] Так как это экспоненциальная фунция с действительными числами в показателе, то, значит, функция будет монотонно возрастать или убывать. Чтобы функция описывала колебания, необходимо, чтобы в показателе были комплексные числа.

Исходя из формул (5.21) и (5.22):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ (\Gamma - \gamma)\alpha - (\Gamma + \gamma)\beta = 0; \end{cases}$$

$$\therefore \alpha = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma}\right), \quad \beta = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right).$$

А значит, решение будет:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left\{\frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma}\right)e^{\Gamma t} + \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)e^{-\Gamma t}\right\}.$$

Можно оставить решение в таком виде, а можно использовать гиперболическую функцию[11]:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

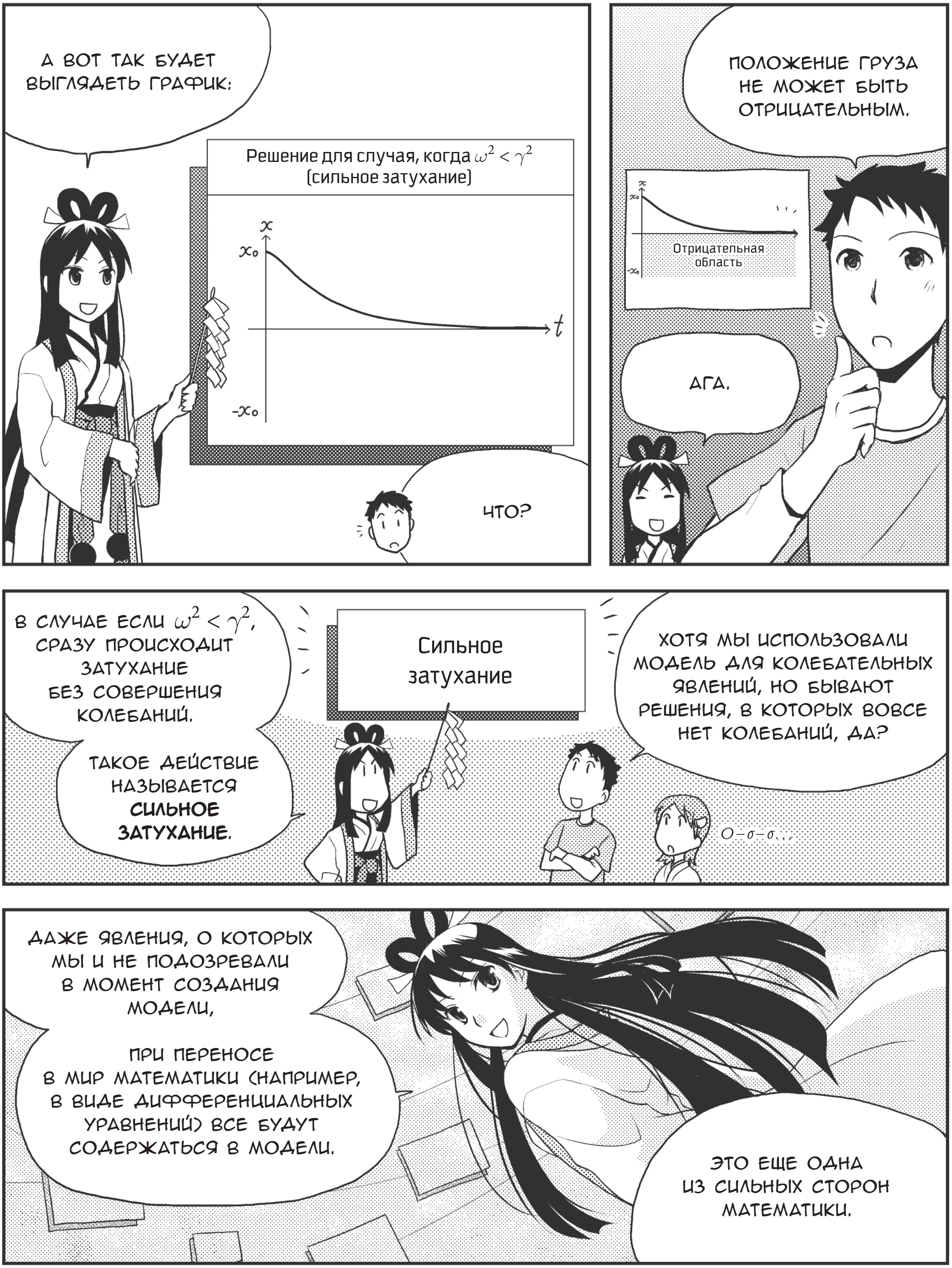
тогда получим уравнение, похожее на формулу Эйлера:

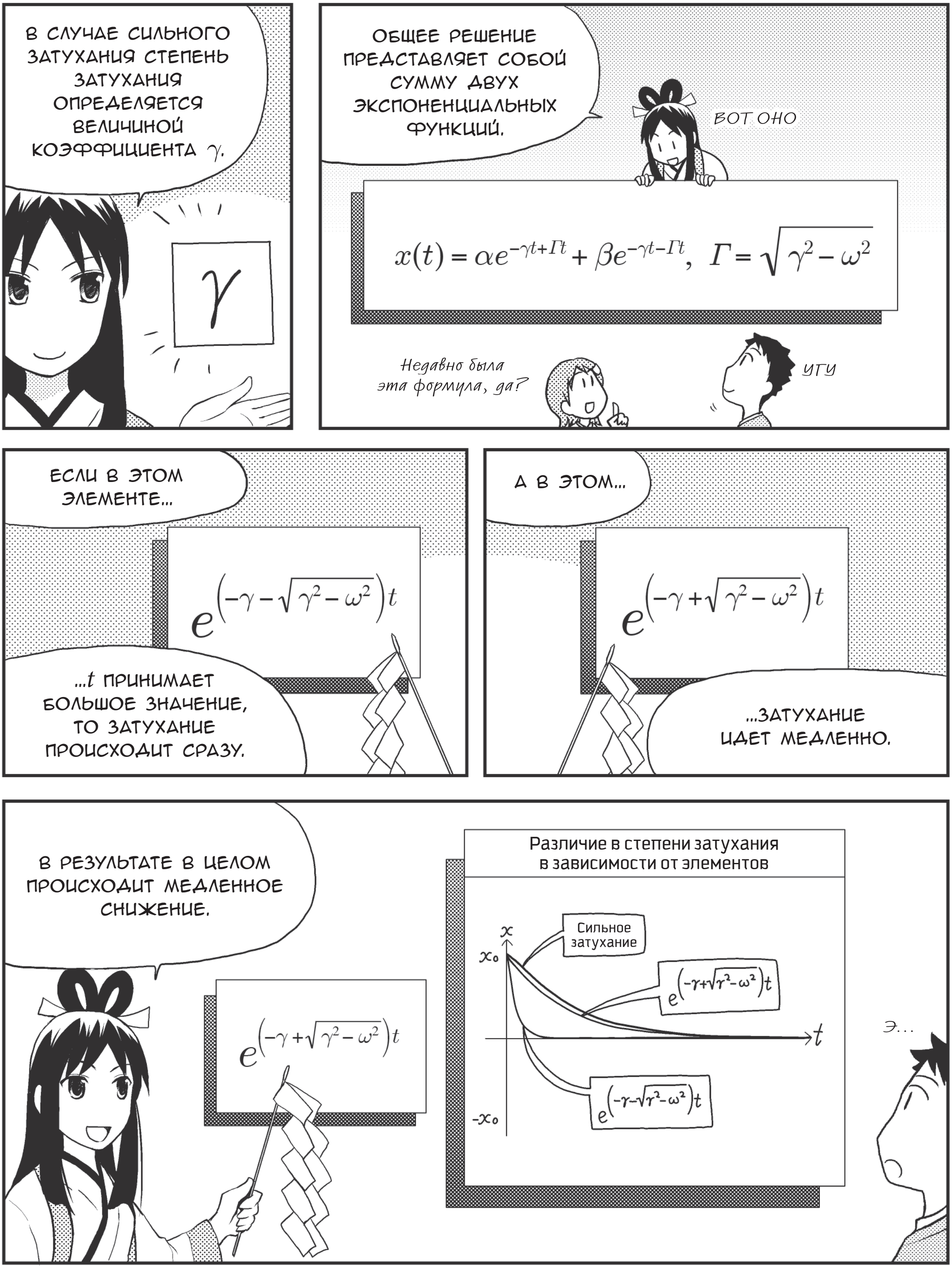
$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x,$

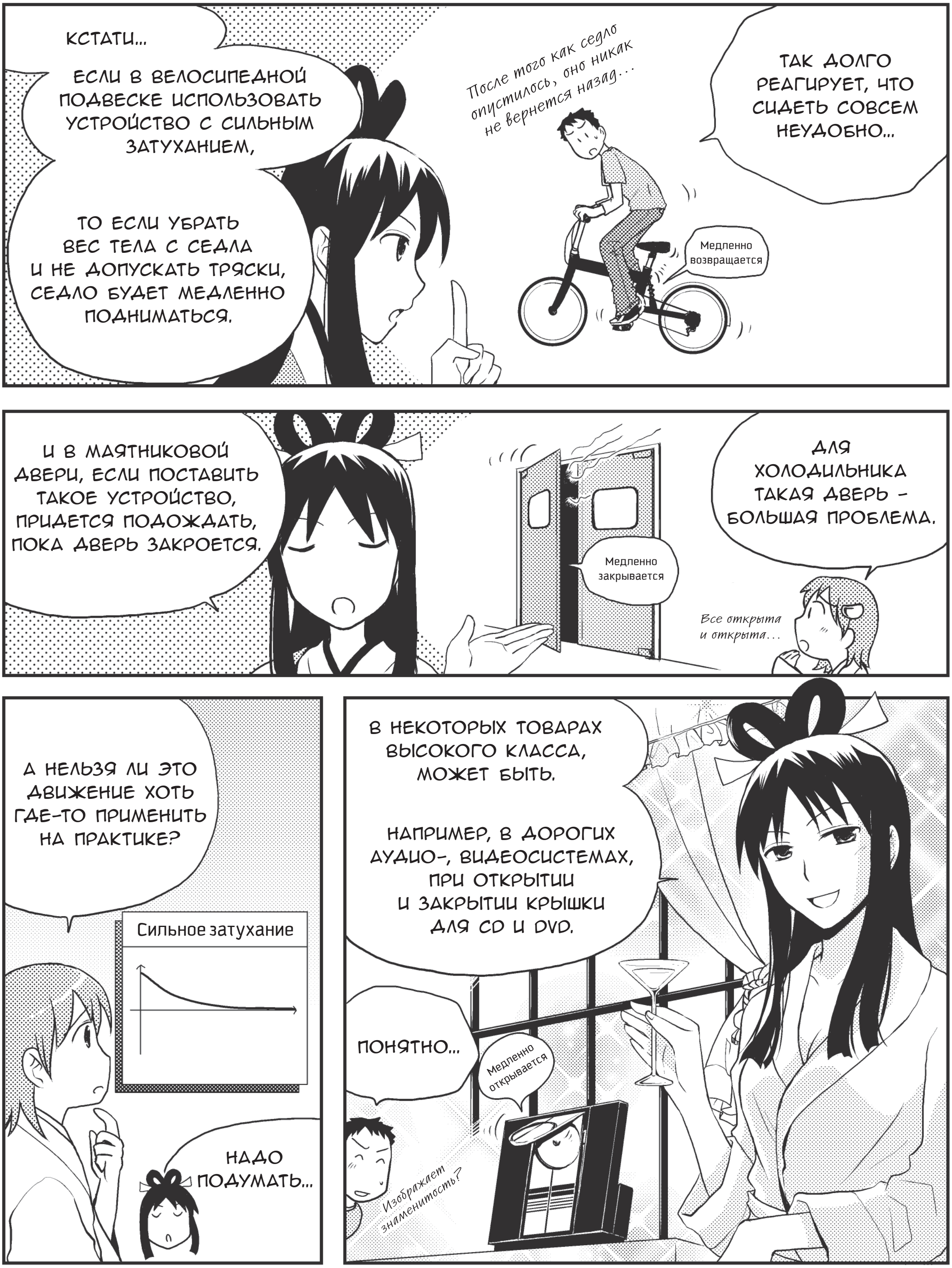
следовательно, общее решение будет выглядеть немного проще:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left\{\frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\Gamma}\right)(\cosh \Gamma t + \sinh \Gamma t) + \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)(\cosh \Gamma t - \sinh \Gamma t)\right\}; \\ &= e^{-\gamma t} x_0 \left(\cosh \Gamma t + \frac{\gamma}{\Gamma}\sinh \Gamma t\right). \end{aligned}$$

[11] Это называется **гиперболический синус** и **гиперболический косинус**.


А ВОТ ТАК БУДЕТ ВЫГЛЯДЕТЬ ГРАФИК:
Решение для случая, когда $\omega^2 < \gamma^2$ (сильное затухание)
x
x_0
t
$-x_0$
ЧТО?
ПОЛОЖЕНИЕ ГРУЗА НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ.
x
x_0
Отрицательная область
$-x_0$
АГА.
В СЛУЧАЕ ЕСЛИ $\omega^2 < \gamma^2$, СРАЗУ ПРОИСХОДИТ ЗАТУХАНИЕ БЕЗ СОВЕРШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ.
ТАКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАЗЫВАЕТСЯ **СИЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ**.
Сильное затухание
ХОТЯ МЫ ИСПОЛЬЗОВАЛИ МОДЕЛЬ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ, НО БЫВАЮТ РЕШЕНИЯ, В КОТОРЫХ ВОВСЕ НЕТ КОЛЕБАНИЙ, ДА?
О-о-о...
ДАЖЕ ЯВЛЕНИЯ, О КОТОРЫХ МЫ И НЕ ПОДОЗРЕВАЛИ В МОМЕНТ СОЗДАНИЯ МОДЕЛИ,
ПРИ ПЕРЕНОСЕ В МИР МАТЕМАТИКИ (НАПРИМЕР, В ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ) ВСЕ БУДУТ СОДЕРЖАТЬСЯ В МОДЕЛИ.
ЭТО ЕЩЕ ОДНА ИЗ СИЛЬНЫХ СТОРОН МАТЕМАТИКИ.


В случае сильного затухания степень затухания определяется величиной коэффицента γ.
γ
Общее решение представляет собой сумму двух экспоненциальных функций.
Вот оно
$x(t) = \alpha e^{-\gamma t+\Gamma t} + \beta e^{-\gamma t-\Gamma t},\ \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
Недавно была эта формула, да?
Угу
Если в этом элементе...
$e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$
...t принимает большое значение, то затухание происходит сразу.
А в этом...
$e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$
...затухание идет медленно.
В результате в целом происходит медленное снижение.
$e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$
Различие в степени затухания в зависимости от элементов
x
x_0
Сильное затухание
$e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$
t
$e^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$
$-x_0$
Э...


КСТАТИ...
ЕСЛИ В ВЕЛОСИПЕДНОЙ ПОДВЕСКЕ ИСПОЛЬЗОВАТЬ УСТРОЙСТВО С СИЛЬНЫМ ЗАТУХАНИЕМ,
ТО ЕСЛИ УБРАТЬ ВЕС ТЕЛА С СЕДЛА И НЕ ДОПУСКАТЬ ТРЯСКИ, СЕДЛО БУДЕТ МЕДЛЕННО ПОДНИМАТЬСЯ.
После того как седло опустилось, оно никак не вернется назад...
Медленно возвращается
ТАК ДОЛГО РЕАГИРУЕТ, ЧТО СИДЕТЬ СОВСЕМ НЕУДОБНО...
И В МАЯТНИКОВОЙ ДВЕРИ, ЕСЛИ ПОСТАВИТЬ ТАКОЕ УСТРОЙСТВО, ПРИДЕТСЯ ПОДОЖДАТЬ, ПОКА ДВЕРЬ ЗАКРОЕТСЯ.
Медленно закрывается
Все открыта и открыта...
ДЛЯ ХОЛОДИЛЬНИКА ТАКАЯ ДВЕРЬ – БОЛЬШАЯ ПРОБЛЕМА.
А НЕЛЬЗЯ ЛИ ЭТО ДВИЖЕНИЕ ХОТЬ ГДЕ-ТО ПРИМЕНИТЬ НА ПРАКТИКЕ?
Сильное затухание
НАДО ПОДУМАТЬ...
В НЕКОТОРЫХ ТОВАРАХ ВЫСОКОГО КЛАССА, МОЖЕТ БЫТЬ.
НАПРИМЕР, В ДОРОГИХ АУДИО-, ВИДЕОСИСТЕМАХ, ПРИ ОТКРЫТИИ И ЗАКРЫТИИ КРЫШКИ ДЛЯ CD И DVD.
ПОНЯТНО...
Медленно открывается
Изображает знаменитость?

■ Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 3 (критическое затухание)

В этом случае общее решение при условии, что α и β – произвольные постоянные, выглядит так:

$$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}. \tag{5.23}$$

В этом случае тоже не получается найти элемент, относящийся к колебаниям.

Здесь снова оттянем груз, прикрепленный к пружине, на расстояние x_0. В момент времени $t = 0$ потихоньку отпустим и рассмотрим ситуацию в этот момент. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0} = 0$, тогда из общего решения (5.23) следует:

$$x(0) = (\alpha + \beta \cdot 0)e^{-\gamma \cdot 0} = \alpha = x_0. \tag{5.24}$$

Учитывая, что $\alpha = x_0$, продифференцируем общее решение (5.23) по t:

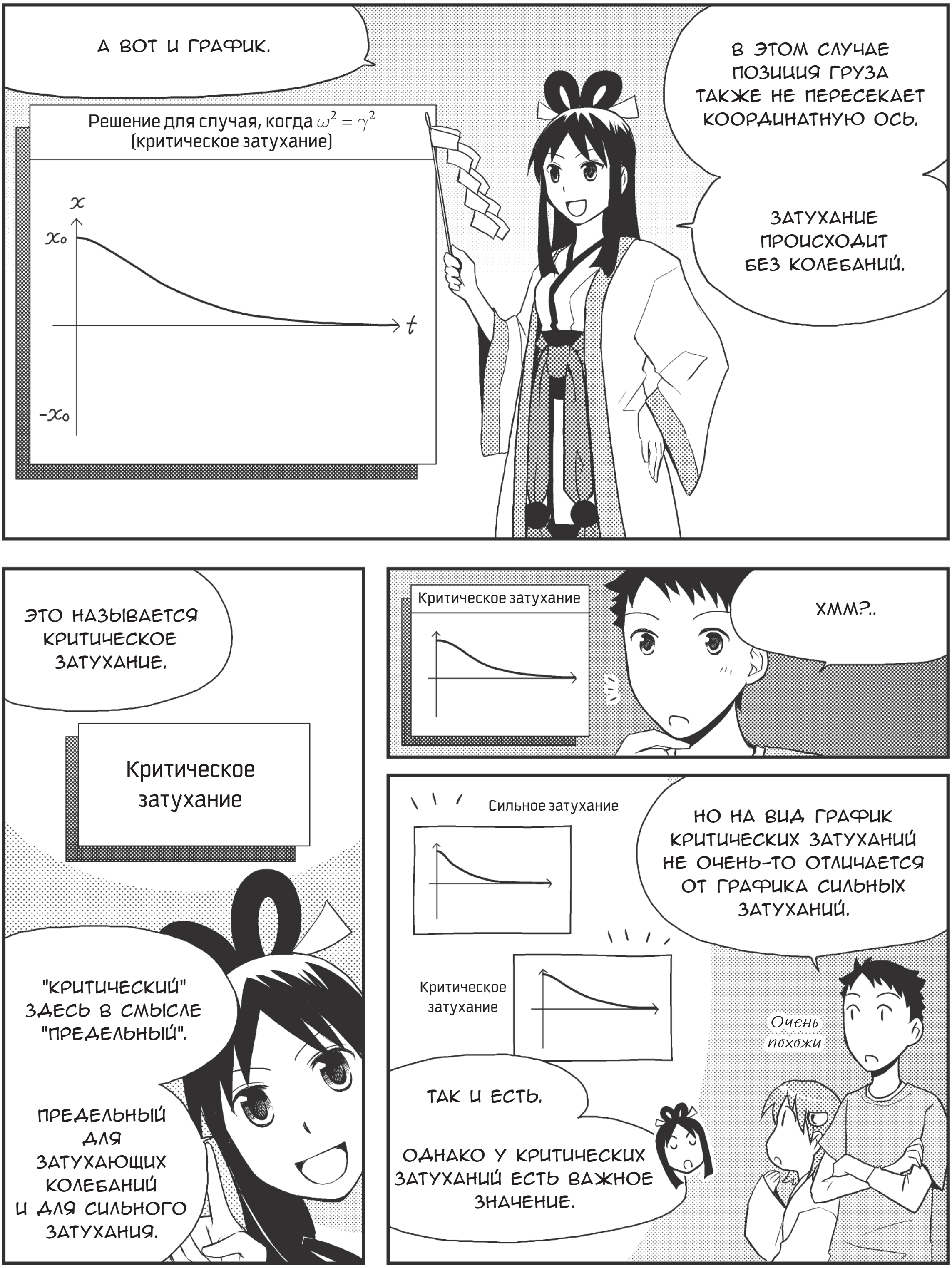
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \beta e^{-\gamma t} + (\alpha + \beta t)(-\gamma)e^{-\gamma t};\\ &= \{\beta - \gamma(\alpha + \beta t)\}e^{-\gamma t},\end{aligned}$$

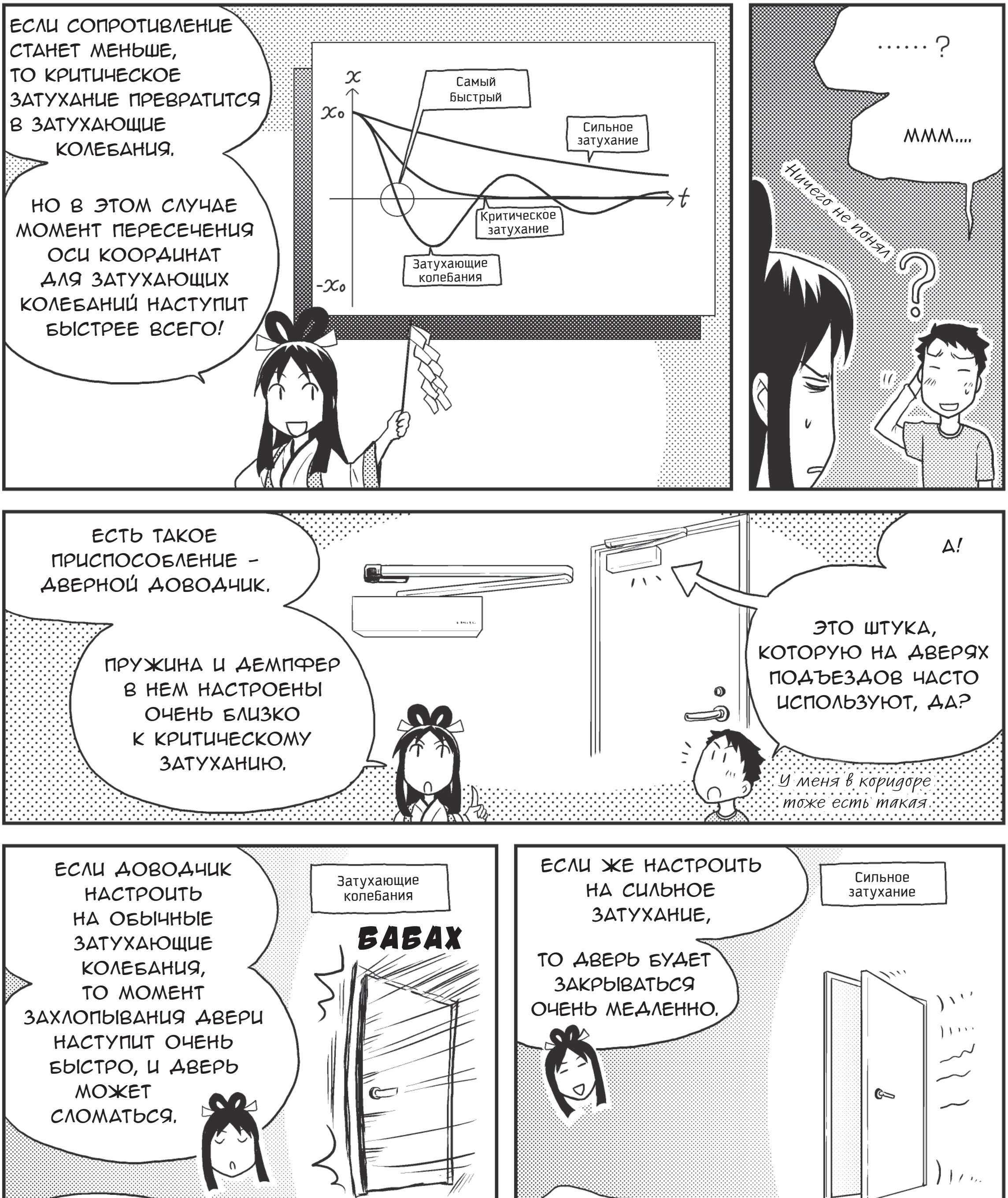
следовательно:

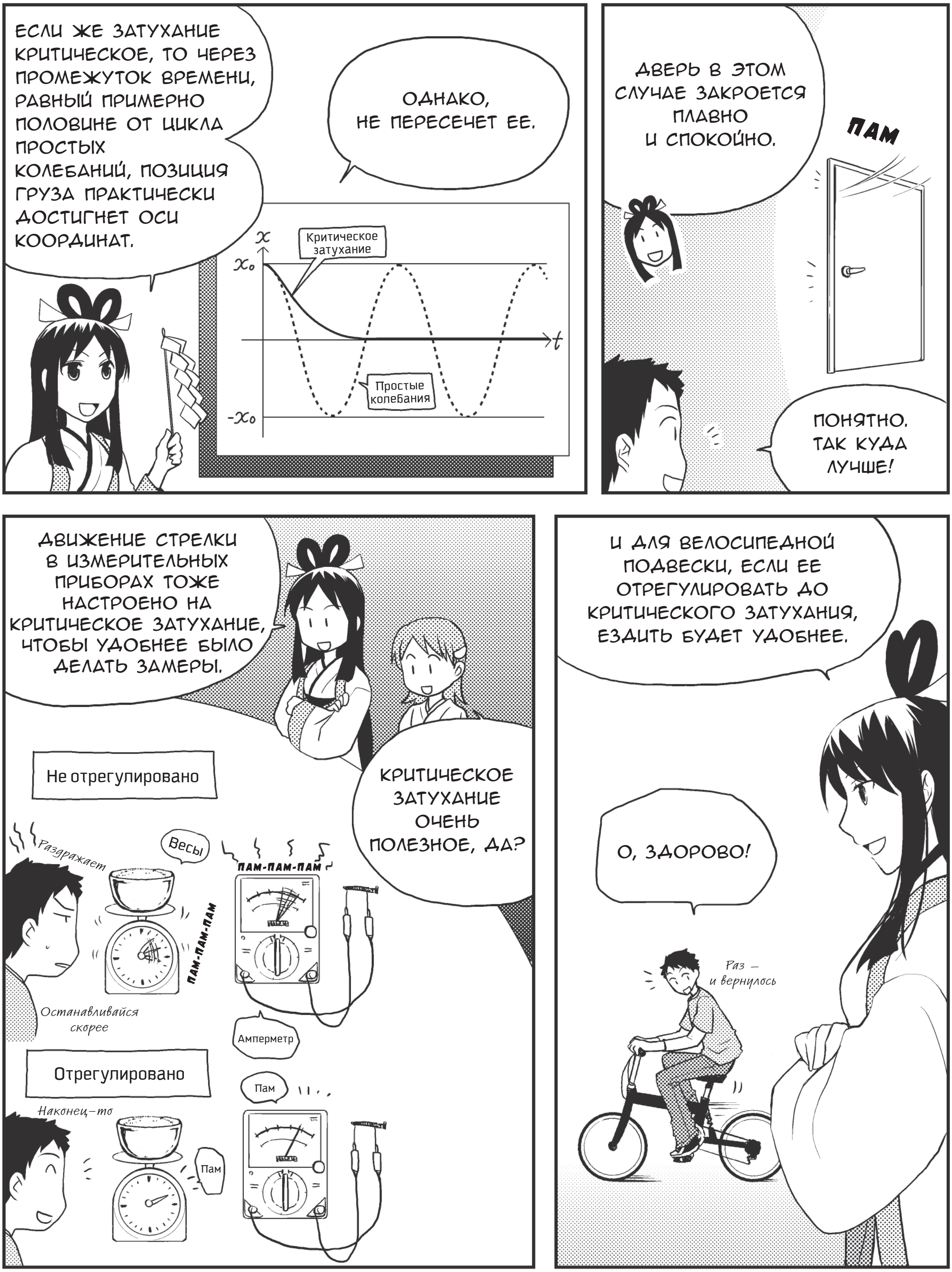
$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} &= \{\beta - \gamma(\alpha + \beta \cdot 0)\}e^{-\gamma \cdot 0} = 0;\\ &\therefore \beta = \gamma x_0.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Исходя из формул (5.24) и (5.25), получаем искомое решение:

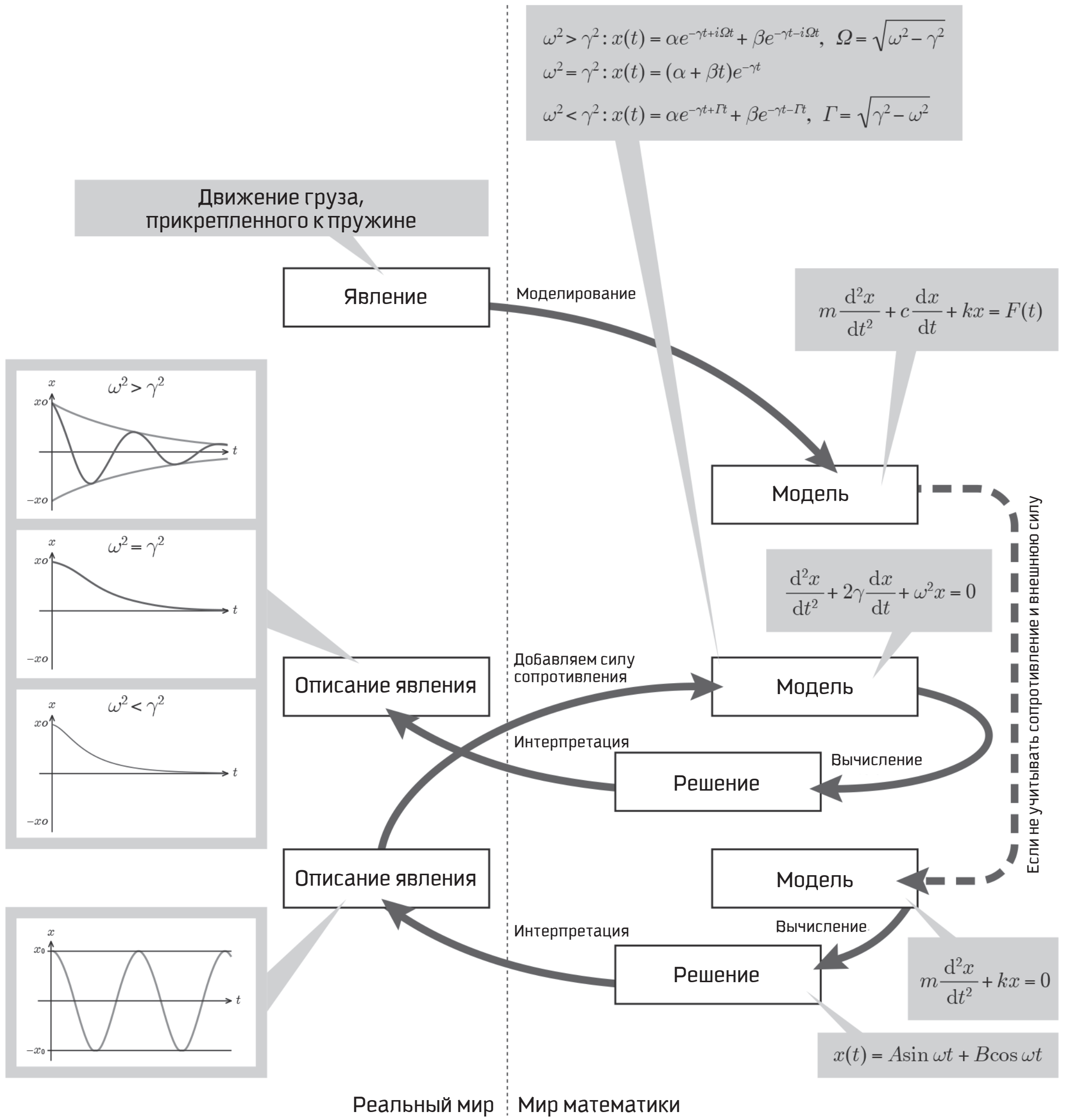
$$\begin{aligned}x(t) &= (x_0 + \gamma x_0 t)e^{-\gamma t};\\ &= x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}.\end{aligned} \tag{5.26}$$


А вот и график.
Решение для случая, когда $\omega^2 = \gamma^2$ (критическое затухание)
x
x_0
t
$-x_0$
В этом случае позиция груза также не пересекает координатную ось.
Затухание происходит без колебаний.
Это называется критическое затухание.
Критическое затухание
Критическое затухание
Хмм?..
"Критический" здесь в смысле "предельный".
Предельный для затухающих колебаний и для сильного затухания.
Сильное затухание
Но на вид график критических затуханий не очень-то отличается от графика сильных затуханий.
Критическое затухание
Очень похожи
Так и есть.
Однако у критических затуханий есть важное значение.


Если сопротивление станет меньше, то критическое затухание превратится в затухающие колебания.
Но в этом случае момент пересечения оси координат для затухающих колебаний наступит быстрее всего!
x
x_0
$-x_0$
t
Самый быстрый
Сильное затухание
Критическое затухание
Затухающие колебания
......?
Ммм....
Ничего не понял.
Есть такое приспособление – дверной доводчик.
Пружина и демпфер в нем настроены очень близко к критическому затуханию.
А!
Это штука, которую на дверях подъездов часто используют, да?
У меня в коридоре тоже есть такая
Если доводчик настроить на обычные затухающие колебания, то момент захлопывания двери наступит очень быстро, и дверь может сломаться.
Затухающие колебания
БАБАХ
Такая силища, что не будь рамы, она бы вылетела!
Если же настроить на сильное затухание,
то дверь будет закрываться очень медленно.
Сильное затухание
...Даже раздражает, да?
Закрывайся уже!


Если же затухание критическое, то через промежуток времени, равный примерно половине от цикла простых колебаний, позиция груза практически достигнет оси координат.
Однако, не пересечет ее.
x
Критическое затухание
x_0
t
Простые колебания
$-x_0$
Дверь в этом случае закроется плавно и спокойно.
ПАМ
Понятно. Так куда лучше!
Движение стрелки в измерительных приборах тоже настроено на критическое затухание, чтобы удобнее было делать замеры.
Критическое затухание очень полезное, да?
Не отрегулировано
Раздражает
Весы
ПАМ-ПАМ-ПАМ
ПАМ-ПАМ-ПАМ
Останавливайся скорее
Амперметр
Отрегулировано
Наконец-то
Пам
Пам
И для велосипедной подвески, если ее отрегулировать до критического затухания, ездить будет удобнее.
О, здорово!
Раз – и вернулось

Итак, на данный момент мы объяснили три возможных решения для случая, когда не учтена внешняя сила.



Интерпретация явления движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия силы сопротивления

Да.

5. ИТОГИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали способы решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, на примере движения груза, прикрепленного к пружине. Подведем итоги. Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0, \qquad (5.27)$$

← Однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

предполагаем такое решение:

$$y(x)=e^{\lambda x}, \qquad (5.28)$$

← Допустимое решение

где λ – это константа.

Допустимое решение (5.28) подставляем в дифференциальное уравнение (5.27):

$$a\frac{d^2}{dx^2}e^{\lambda x}+b\frac{d}{dx}e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0.$$

Дифференцируем:

$$a\lambda^2e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0.$$

Выносим $e^{\lambda x}$ за скобки:

$$(a\lambda^2+b\lambda+c)e^{\lambda x}=0. \qquad (5.29)$$

Как мы видели раньше, экспоненциальная функция $e^{\lambda x}$ при любом значении x не может быть равной нулю, а значит, чтобы выполнялось равенство (5.29), должно выполняться это равенство:

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0. \qquad (5.30)$$

Это квадратное уравнение относительно λ, а значит, его решения:

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \lambda_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Другими словами, у алгебраического уравнения (5.30) есть два решения, а значит, и у дифференциального уравнения (5.27) тоже два решения:

$$y(x)=e^{\lambda x},$$

← Решения однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Таким образом, так как решения алгебраического уравнения обеспечивают решения дифференциального уравнения, это алгебраическое уравнение (5.30) называется **характеристическим уравнением**. Если знаем решение характеристического уравнения, значит, можем найти и решение дифференциального. А так как квадратное уравнение всегда можно решить, то и однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами можно решить.

Решения характеристического уравнения (5.30) можно разделить на части в зависимости от знака подкоренного выражения (дискриминанта $b^2 - 4ac$). В случае когда $b^2 > 4ac$, решением являются два действительных числа, в случае когда $b^2 = 4ac$, получаем одно важное решение, если же $b^2 < 4ac$, решением будут два сопряженных комплексных числа. Рассмотрим каждый случай по отдельности.

Когда $b^2 > 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) являются два действительных числа:

$$\lambda_1 = \frac{-b+\gamma}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b-\gamma}{2a}, \quad \gamma = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{2a}x+\frac{\gamma}{2a}x} + \beta e^{-\frac{b}{2a}x-\frac{\gamma}{2a}x}.$$

Когда $b^2 = 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) будет вот это:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

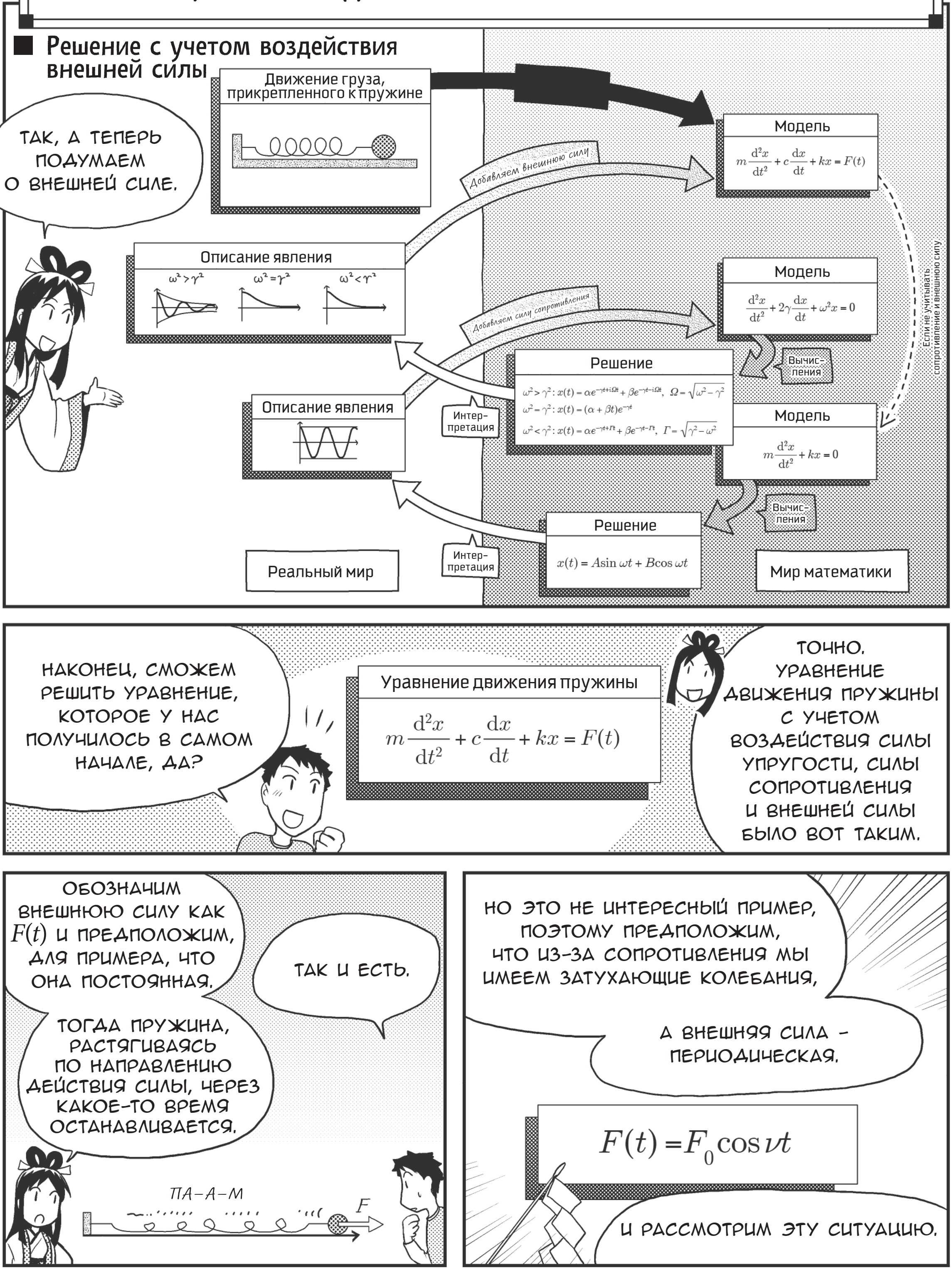
Когда $b^2 < 4ac$, решением характеристического уравнения (5.30) являются два сопряженных комплексных числа:

$$\lambda_1 = \frac{-b+i\Gamma}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b-i\Gamma}{2a}, \quad \Gamma = \sqrt{4ac - b^2},$$

поэтому общим решением дифференциального уравнения (5.27), где α и β – произвольные постоянные, будет вот это:

$$y(x) = \alpha e^{-\frac{b}{2a}x+i\frac{\Gamma}{2a}x} + \beta e^{-\frac{b}{2a}x-i\frac{\Gamma}{2a}x}.$$

6. ВОЗВРАЩЕНИЕ К МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ 1 С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ СИЛ



В уравнении движения пружины с учетом воздействия силы упругости, силы сопротивления и внешней силы разделим обе части на m и вот что получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0 \cos \nu t}{m}.$$

Это тоже линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Так же как в формуле (5.1), сделаем замену:

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

и снова так же, как на стр. 172:

$$\frac{c}{m} = 2\gamma,$$

заменяем:

$$\frac{F_0}{m} = f,$$

и дифференциальное уравнение (5.31) можно переписать вот так:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = f \cos \nu t. \tag{5.32}$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Попробуем его решить.

Так как это дифференциальное уравнение неоднородное, используем метод, описанный в главе 4. Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (5.32), согласно стр. 172, будет таким:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0.$$

А значит, допустимым решением неоднородного уравнения (5.32), исходя из решения однородного уравнения при $\omega^2 > \gamma^2$ на стр. 180, будет:

$$x(t) = A\cos \nu t + B\sin \nu t. \qquad \leftarrow \text{Допустимое решение} \tag{5.33}$$

Определим константы A и B, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (5.32).

После дифференцирования по t допустимого решения (5.11) получили:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= A\frac{d}{dt}\cos\nu t + B\frac{d}{dt}\sin\nu t;\\ &= -A\nu\sin\nu t + B\nu\cos\nu t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -A\nu\frac{d}{dt}\sin\nu t + B\nu\frac{d}{dt}\cos\nu t;\\ &= -A\nu^2\cos\nu t - B\nu^2\sin\nu t.\end{aligned}$$

Следовательно, если подставить полученные результаты в дифференциальное уравнение (5.32), получим вот что:

$$\{-A\nu^2\cos\nu t - B\nu^2\sin\nu t\} + 2\gamma\{-A\nu\sin\nu t - B\nu\cos\nu t\} + \omega^2(A\cos\nu t - B\cos\nu t) = f\cos\nu t.$$

Перегруппируем и получим:

$$\{(\omega^2 - \nu^2)A + 2\gamma\nu B\}\cos\nu t + \{2\gamma\nu A + (\omega^2 - \nu^2)B\}\sin\nu t = f\cos\nu t.$$

Чтобы выполнялось равенство, должны соблюдаться эти условия:

$$\begin{cases}(\omega^2-\nu^2)A + 2\gamma\nu B = f\\ -2\gamma\nu A + (\omega^2-\nu^2)B = 0\end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений, получим константы A и B:

$$A = \frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f,\quad B = \frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f.$$

Следовательно, исходя из допустимого решения (5.33), частным решением уравнения (5.32) будет:

$$x(t) = \frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\cos\nu t + \frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\sin\nu t. \tag{5.34}$$

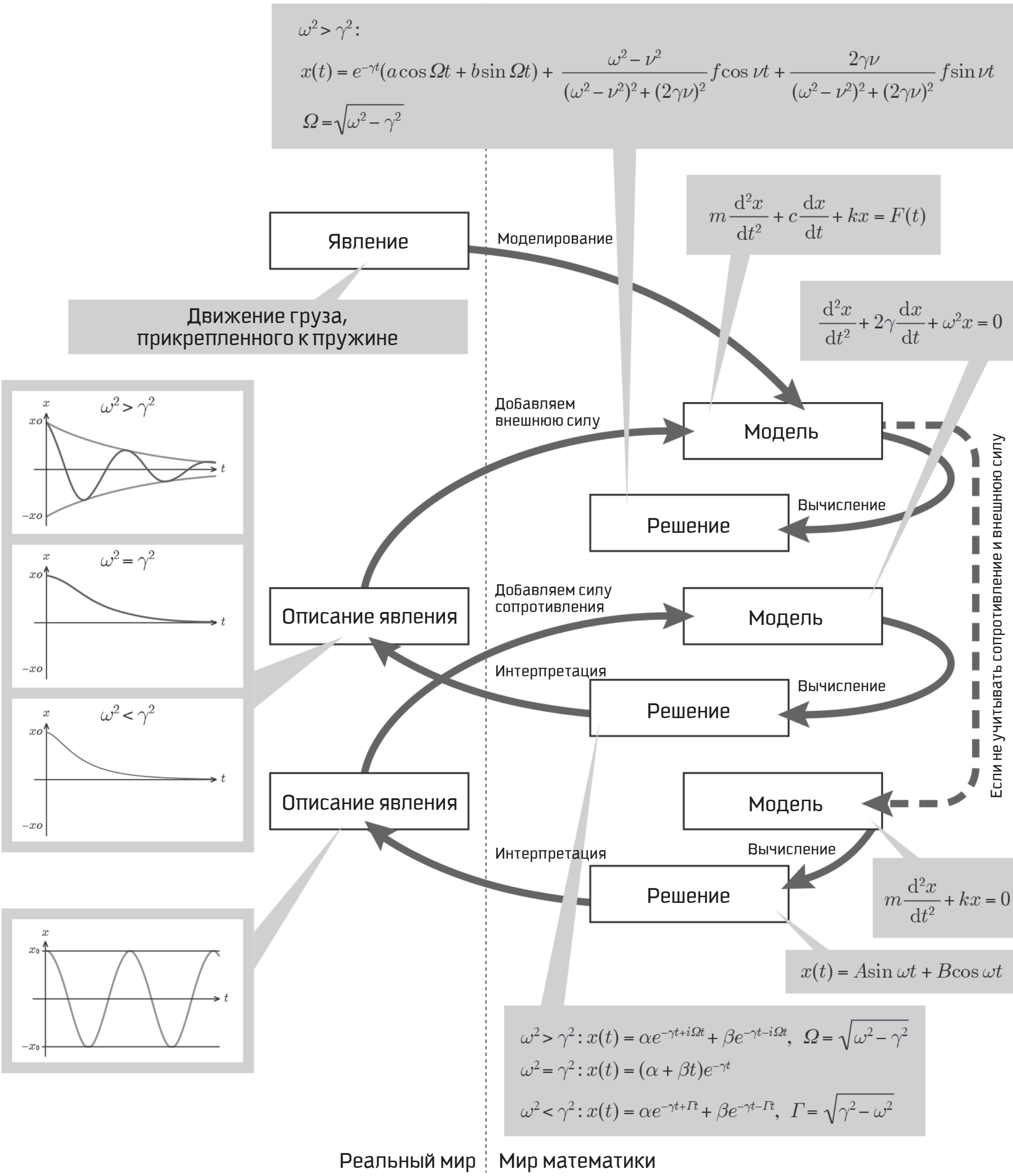
А значит, общее решение дифференциального уравнения (5.32) будет равно сумме общего решения (5.16) однородного уравнения $\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0$:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t),\ \Omega = \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$$

и частного решения (5.34) неоднородного уравнения (5.32). Вот что получится в итоге:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t)\\ &\quad+\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\cos\nu t + \frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\sin\nu t.\end{aligned} \tag{5.35}$$

Наконец, получили общее решение!



Решение для модели явления движения груза, прикрепленного к пружине, с добавлением воздействия внешней силы

Ага.

Интерпретация решения с учетом внешней силы

Рассмотрим ситуацию, когда груз стоит в исходной точке, а угловая частота воздействующей на него периодической внешней силы равна собственной угловой частоте. Начальное состояние будет $t = 0$, $x(0) = x_0$, $[\mathrm{d}x/\mathrm{d}t]_{t=0} = 0$, и раз угловая частота внешней силы равна собственной угловой частоте, значит, $\nu = \omega$. Прежде всего подставим $\nu = \omega$ в общее решение (5.35):

$$x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + \frac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t. \tag{5.36}$$

Теперь применим условие начального состояния $x(0) = x_0$:

$$x(0) = e^{-\gamma\cdot 0}\{a\cos(\Omega\cdot 0) + b\sin(\Omega\cdot 0)\} + \frac{f}{2\gamma\omega}\sin(\omega\cdot 0) = a = 0. \tag{5.37}$$

Продифференцируем решение (5.36) по t:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\gamma e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + e^{-\gamma t}(-a\Omega\sin\Omega t + b\Omega\cos\Omega t) + \frac{f}{2\gamma}\cos\omega t;\\ &= e^{-\gamma t}\{(-\gamma a + b\Omega)\cos\Omega t - (\gamma b + a\Omega)\sin\Omega t\} + \frac{f}{2\gamma}\cos\omega t.\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} &= e^{-\gamma\cdot 0}\{(-\gamma a + b\Omega)\cos(\Omega\cdot 0) - (\gamma b + a\Omega)\sin(\Omega\cdot 0)\} + \frac{f}{2\gamma}\cos(\omega\cdot 0);\\ &= -\gamma a + b\Omega + \frac{f}{2\gamma} = 0.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Исходя из формул (5.37) и (5.38), получаем:

$$\begin{cases} a = 0 \\ -\gamma a + b\Omega + \dfrac{f}{2\gamma} = 0 \end{cases}; \quad \therefore \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{f}{2\gamma\Omega} \end{cases}. \tag{5.39}$$

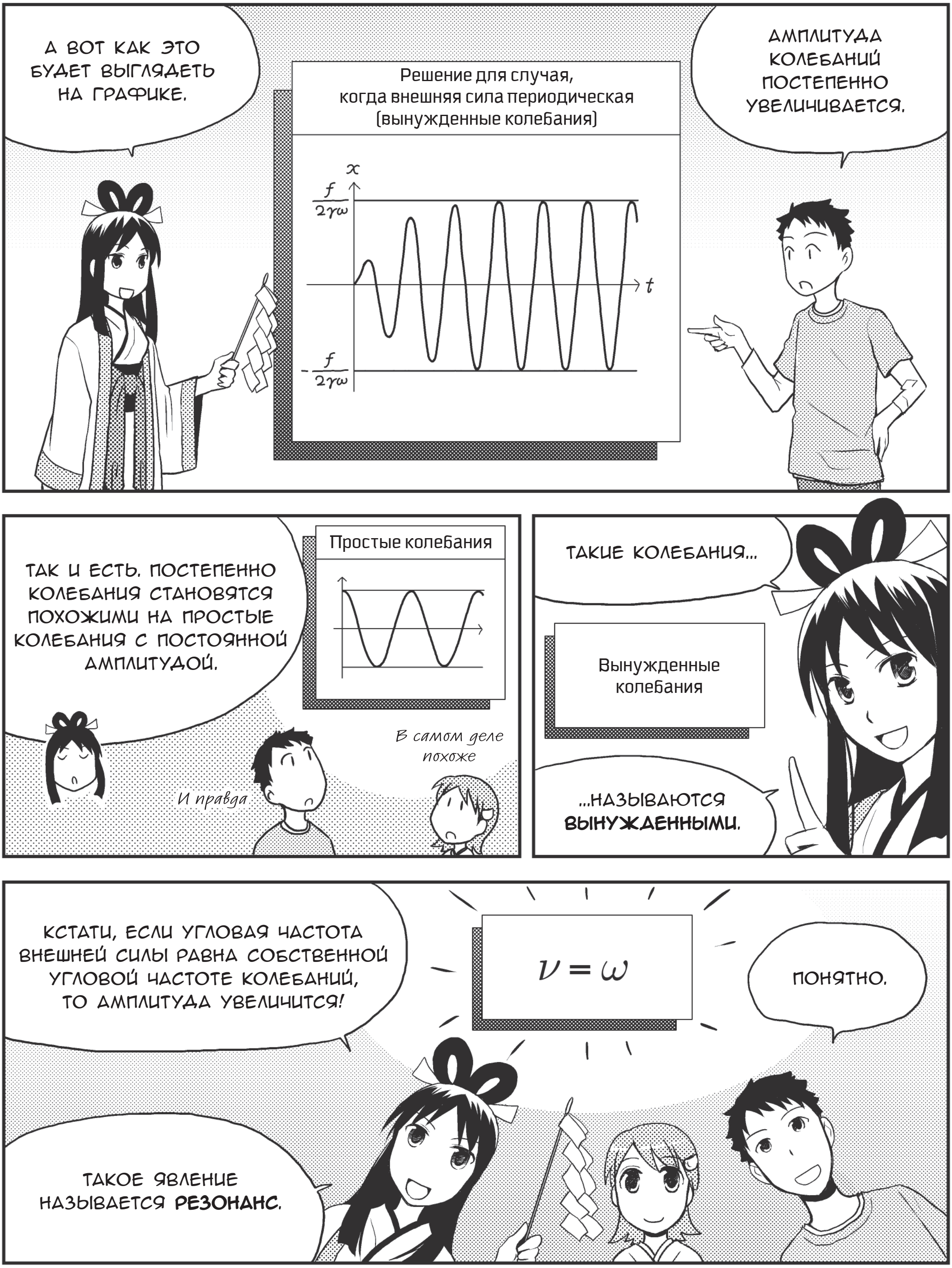
Подставим полученное решение (5.39) в общее решение (5.36):

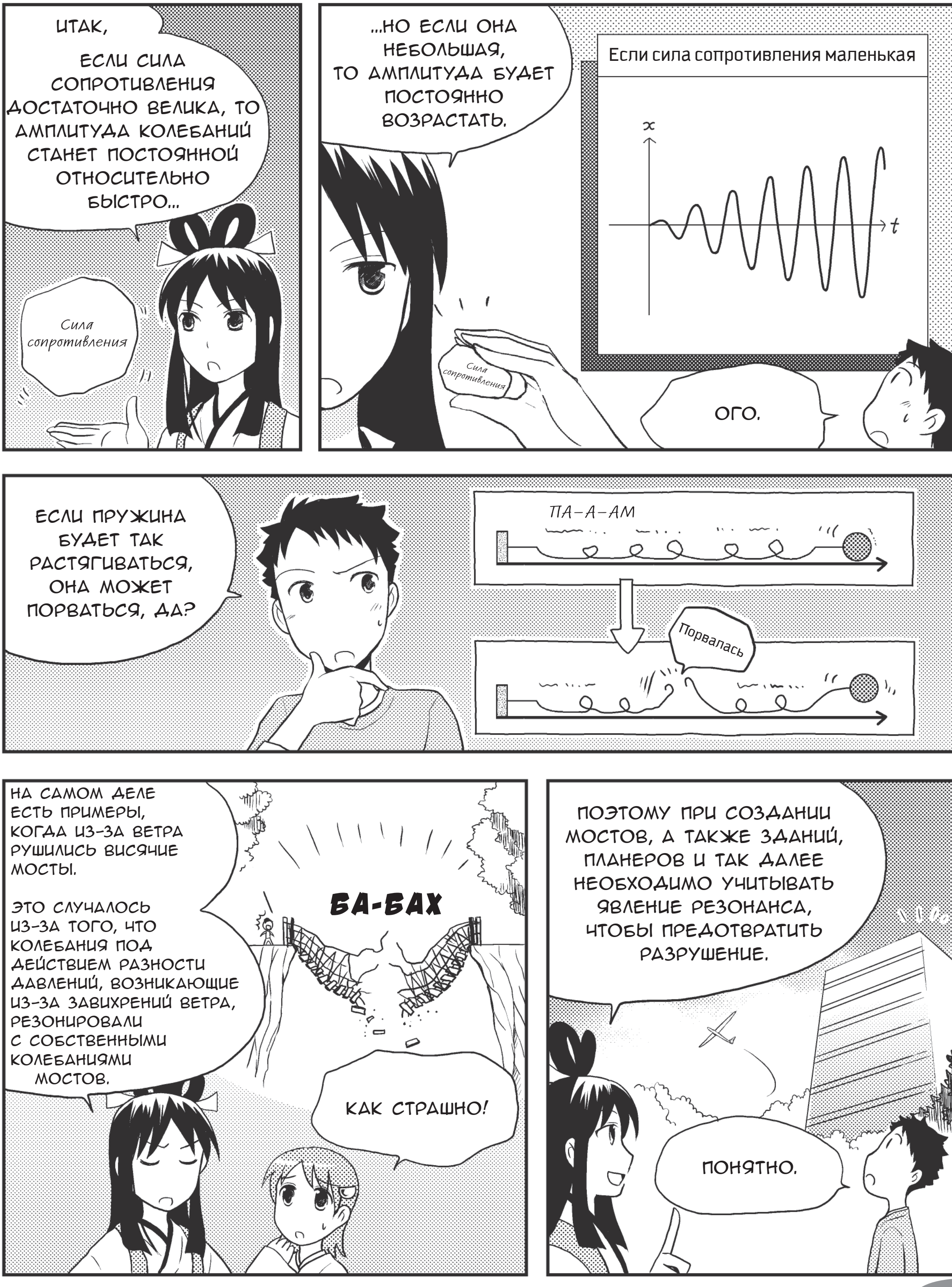
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(-\frac{f}{2\gamma\Omega}\sin\Omega t\right) + \frac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t.$$

Чтобы упростить решение, предположим, что $\gamma << \omega$, тогда $\Omega \sim \omega$, а значит, решение можно записать так:

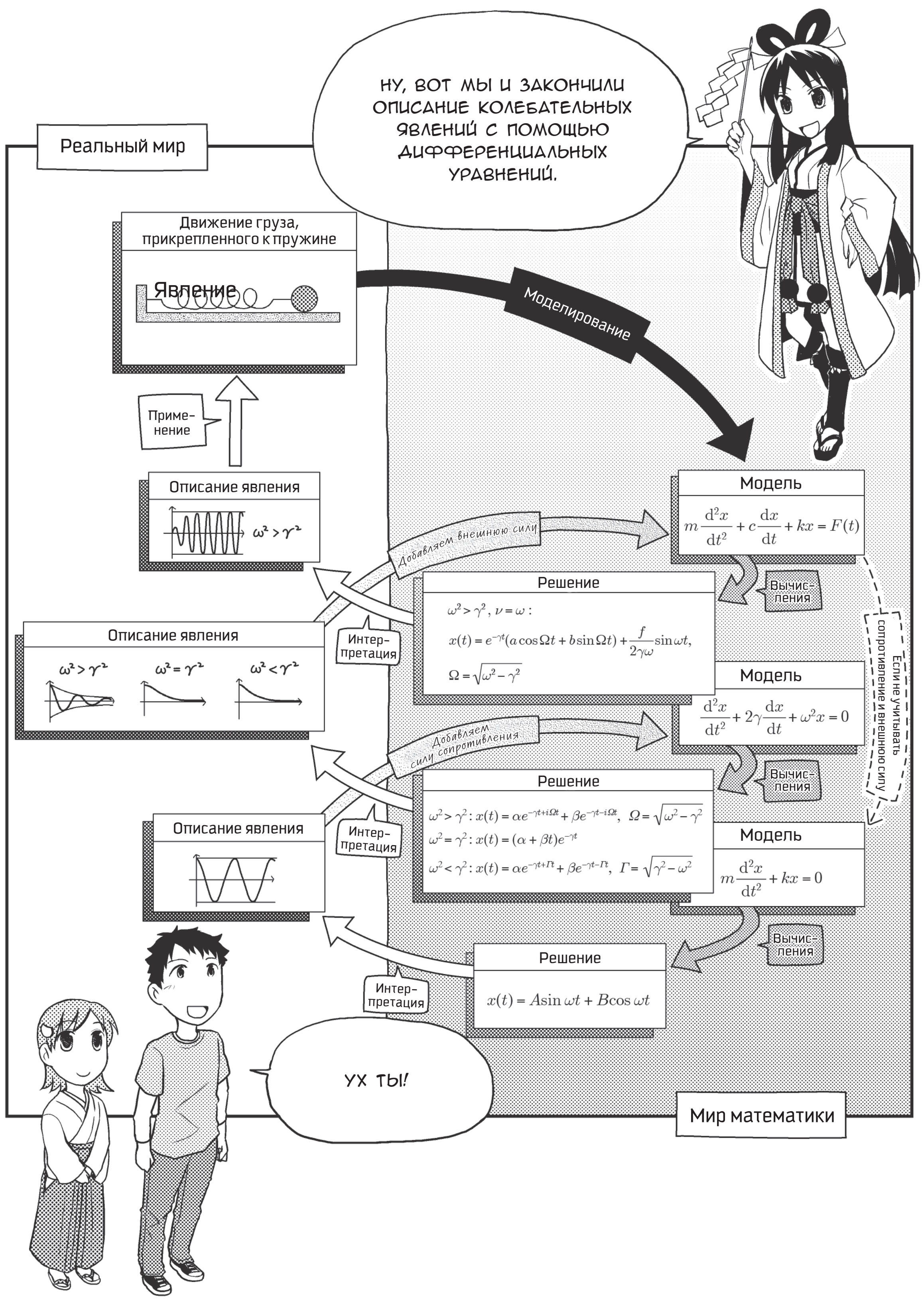
$$x(t) = \frac{f}{2\gamma\omega}(1 - e^{-\gamma t})\sin\omega t.$$

О-о-о!


А вот как это будет выглядеть на графике.
Решение для случая, когда внешняя сила периодическая (вынужденные колебания)
x
$\frac{f}{2\gamma\omega}$
t
$-\frac{f}{2\gamma\omega}$
Амплитуда колебаний постепенно увеличивается.
Так и есть. Постепенно колебания становятся похожими на простые колебания с постоянной амплитудой.
Простые колебания
И правда
В самом деле похоже
Такие колебания...
Вынужденные колебания
...называются **вынужденными**.
Кстати, если угловая частота внешней силы равна собственной угловой частоте колебаний, то амплитуда увеличится!
$\nu = \omega$
Понятно.
Такое явление называется **резонанс**.



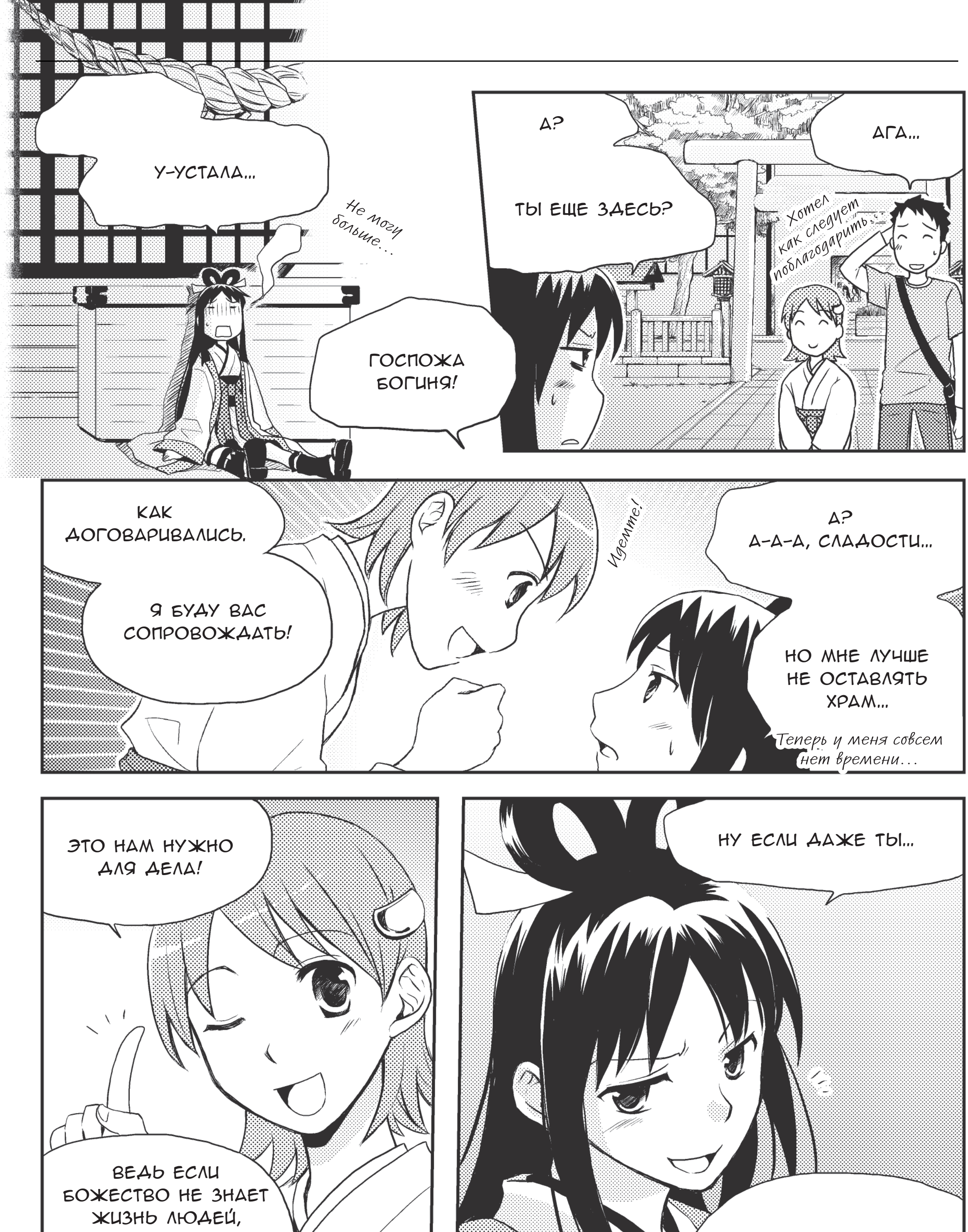
Итак,
если сила сопротивления достаточно велика, то амплитуда колебаний станет постоянной относительно быстро...
Сила сопротивления
...но если она небольшая, то амплитуда будет постоянно возрастать.
Если сила сопротивления маленькая
x
t
Сила сопротивления
Ого.
Если пружина будет так растягиваться, она может порваться, да?
ПА-А-АМ
Порвалась
На самом деле есть примеры, когда из-за ветра рушились висячие мосты.
Это случалось из-за того, что колебания под действием разности давлений, возникающие из-за завихрений ветра, резонировали с собственными колебаниями мостов.
БА-БАХ
Как страшно!
Поэтому при создании мостов, а также зданий, планеров и так далее необходимо учитывать явление резонанса, чтобы предотвратить разрушение.
Понятно.


НУ, ВОТ МЫ И ЗАКОНЧИЛИ ОПИСАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.
Реальный мир
Движение груза, прикрепленного к пружине
Явление
Моделирование
Приме-нение
Описание явления
$\omega^2 > \gamma^2$
Модель
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t)$
Добавляем внешнюю силу
Вычис-ления
Решение
$\omega^2 > \gamma^2,\ \nu = \omega:$
$x(t) = e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t) + \dfrac{f}{2\gamma\omega}\sin\omega t,$
$\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$
Интер-претация
Описание явления
$\omega^2 > \gamma^2$ $\omega^2 = \gamma^2$ $\omega^2 < \gamma^2$
Модель
$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$
Если не учитывать сопротивление и внешнюю силу
Добавляем силу сопротивления
Вычис-ления
Решение
$\omega^2 > \gamma^2: x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t},\ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$
$\omega^2 = \gamma^2: x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\gamma t}$
$\omega^2 < \gamma^2: x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t},\ \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
Интер-претация
Описание явления
Модель
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$
Вычис-ления
Решение
$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$
Интер-претация
УХ ТЫ!
Мир математики

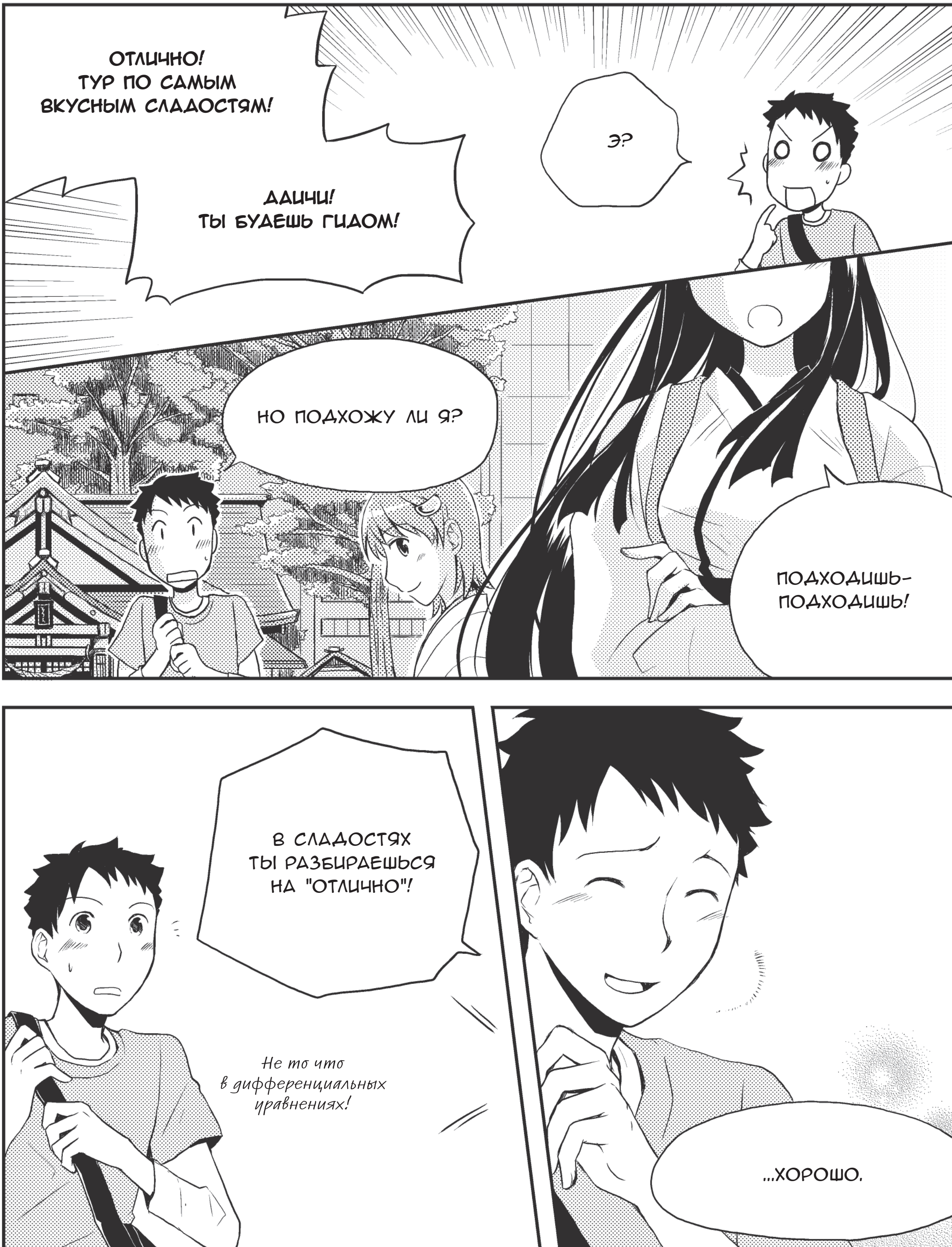

НУ КАК? РАЗОБРАЛСЯ С ДИФФЕРЕН-ЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ?
ДА!
У МЕНЯ ТАКОЕ ЧУВСТВО, ЧТО ПОСТЕПЕННО, ПРОХОДЯ ЦИКЛ ЗА ЦИКЛОМ, Я ПРИБЛИЗИЛСЯ К ПОНИМАНИЮ.
ЭТО, НАВЕРНОЕ, ПОТОМУ, ЧТО ВЫ, ГОСПОЖА БОГИНЯ, ПРИВОДИЛИ ОЧЕНЬ ПОНЯТНЫЕ ПРИМЕРЫ!
ПОТОМУ ЧТО ИНАЧЕ ТЫ НИЧЕГОШЕНЬКИ НЕ ПОНИМАЛ!
Деваться было некуда!
ОДНАКО...
...Я ТОЖЕ ПОНЯЛА ОДНУ ВЕЩЬ. ЧТО ВАЖНО ОБЪЯСНЯТЬ ТАК, ЧТОБЫ МОЖНО БЫЛО ЛЕГКО ПОНЯТЬ.
СПАСИБО!
НУ, ЧТО ВЫ...

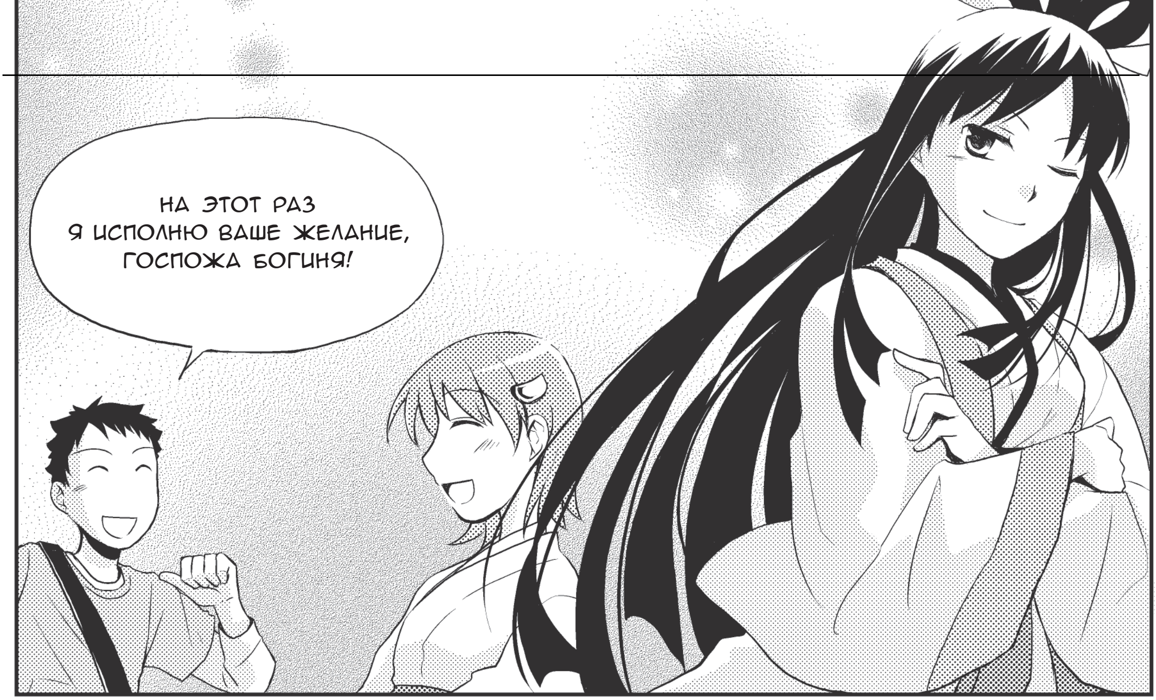
Как хорошо!
И госпожа богиня, и Даичи...
...кажется, они преодолели каждый свою стену.
А чтобы лучше усвоить моделирование, попробуй решить разные задачи.
Непременно. Спасибо!
Ну...
Даичи,
я сделала, что могла, для выполнения твоего желания.


ТЕПЕРЬ ДЕЛО ЗА ТОБОЙ!
А...
ГОСПОЖА БОГИНЯ...
У ГОСПОЖИ БОГИНИ
ТЕПЕРЬ МНОГО ДЕЛ, ДА?
АГА...
ААА...
数宮神社



У-УСТАЛА...
Не могу больше...
ГОСПОЖА БОГИНЯ!
А?
ТЫ ЕЩЕ ЗДЕСЬ?
АГА...
Хотел как следует поблагодарить...
КАК ДОГОВАРИВАЛИСЬ.
Я БУДУ ВАС СОПРОВОЖДАТЬ!
Идемте!
А? А-А-А, СЛАДОСТИ...
НО МНЕ ЛУЧШЕ НЕ ОСТАВЛЯТЬ ХРАМ...
Теперь у меня совсем нет времени...
ЭТО НАМ НУЖНО ДЛЯ ДЕЛА!
ВЕДЬ ЕСЛИ БОЖЕСТВО НЕ ЗНАЕТ ЖИЗНЬ ЛЮДЕЙ, ЭТО НИКУДА НЕ ГОДИТСЯ, ПРАВДА?
НУ ЕСЛИ ДАЖЕ ТЫ...
...ТАК ГОВОРИШЬ. ИДЕМ!


ОТЛИЧНО! ТУР ПО САМЫМ ВКУСНЫМ СЛАДОСТЯМ!
ДАИЧИ! ТЫ БУДЕШЬ ГИДОМ!
Э?
НО ПОДХОЖУ ЛИ Я?
ПОДХОДИШЬ-ПОДХОДИШЬ!
В СЛАДОСТЯХ ТЫ РАЗБИРАЕШЬСЯ НА "ОТЛИЧНО"!
Не то что в дифференциальных уравнениях!
...ХОРОШО.


НА ЭТОТ РАЗ
Я ИСПОЛНЮ ВАШЕ ЖЕЛАНИЕ,
ГОСПОЖА БОГИНЯ!


НО ЕСЛИ БУДЕТ
НЕВКУСНО, ТЫ
УЗНАЕШЬ, ЧТО ТАКОЕ
БОЖЕСТВЕННЫЙ ГНЕВ!
А, ПОНЯЛ...

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ОХЛАЖДЕНИЕ КОФЕ

С недавних пор появилось много разных видов кофе, что, конечно, прекрасно для тех, кто его любит. Если выпить кофе хочется побыстрее, то по всей Японии можно купить баночный кофе в торговом автомате.

Однако баночный кофе быстро остывает, не так ли. Возможно, поэтому, когда только достаешь его из автомата, кофе иногда такой горячий, что его невозможно держать в руках. И если его сразу выпить, то можно обжечься. Так когда же наступает момент, когда кофе готов к употреблению?

Процесс понижения температуры кофе тоже можно смоделировать в виде дифференциального уравнения. Если имеется кофе, температура которого выше температуры окружающей среды, то кофе начнет остывать. Понятно, что изменение температуры кофе относительно времени будет пропорционально разнице между температурой кофе и температурой окружающей среды[1]. Обозначим время за t, температуру кофе за $T(t)$, температуру окружающей среды за T_e, а коэффициент пропорциональности через k, тогда получается:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_e).$$

← Дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры кофе относительно времени

Это называется **закон охлаждения Ньютона**[2].

Попробуем решить. Прежде всего найдем переменные:

Зависимая переменная

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_e).$$

Независимая переменная

Хотя тут присутствует лишний элемент, но все же можно применить метод разделения переменных. Разделим обе части на $T - T_e$:

$$\frac{1}{T - T_e}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{1}{T - T_e}\,\mathrm{d}T = -k\int \mathrm{d}t.$$

---

[1] В этом можно легко убедиться, достаточно только иметь термометр, часы и бумагу для графика.

[2] На самом деле в законе идет речь не об изменении температуры, а об изменении количества тепла, но если теплоемкость объекта не меняется, то результат будет одинаковым.

Итак, у нас получилось разделить переменные, то есть собрать слева переменные T, а справа переменную t.

$$\int \frac{1}{T - T_e} \mathrm{d}T = -k \int \mathrm{d}t.$$

Решим интегралы в обеих частях по отдельности:

$$\int \frac{1}{T - T_e} \mathrm{d}T = \ln\left|T - T_e\right| + C;$$

$$-k \int \mathrm{d}t = -kt + C.$$

Объединим интегральные постоянные:

$$\ln|T - T_e| = -kt + C.$$

Получили функцию температуры в зависимости от времени $T(t)$:

$$T(t) - T_e = e^{-kt+C}, \qquad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения}$$

то есть решили дифференциальное уравнение.

Теперь найдем интегральную константу. В момент времени $t = 0$ температура кофе будет равна $T(0) = T_0$ $(> T_e)$[3]. Это будет начальным состоянием, поэтому:

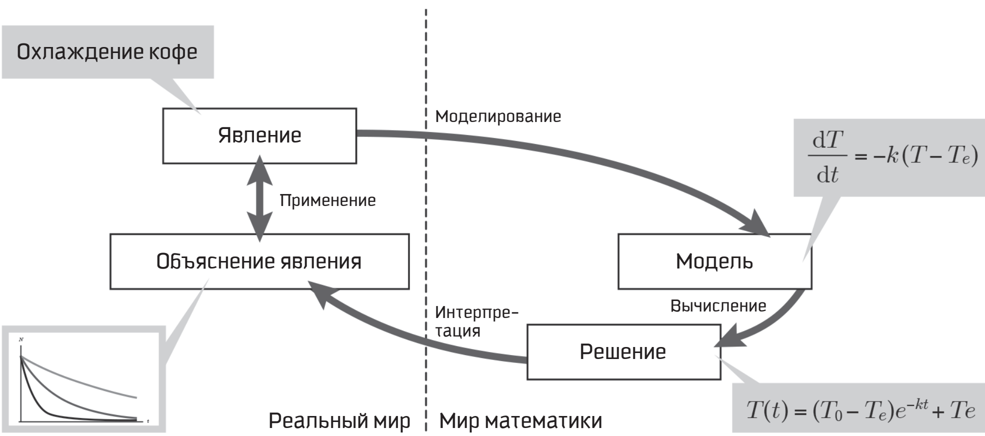
$$T(0) - T_e = e^C.$$

Следовательно:

$$T_0 - T_e = e^C.$$

Значит, функцию температуры кофе можно записать вот так:

$$T(t) = (T_0 - T_e)e^{-kt} + T_e.$$



Объяснение процесса остывания кофе с течением времени

Объяснение явления охлаждения кофе

---

[3] Потому что мы рассматриваем ситуацию, когда кофе горячий, а не холодный.

График этой функции будет выглядеть так же, как график функции радиоактивного распада, сдвинутый вверх[4]. Чем выше значение параметра k, тем быстрее будет остывать кофе.

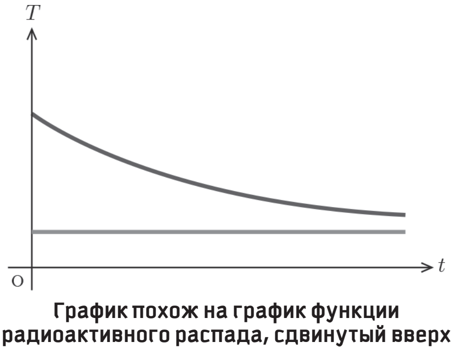


График изменения температуры кофе T в зависимости от времени t

Другими словами, если из торгового автомата выпал слишком горячий кофе, то, быстро замерив изменение его температуры и вычислив параметр k, можно спрогнозировать, когда наступит благоприятное время для того, чтобы его выпить. Но, получив прогноз, нельзя дуть на кофе, потому что в этом случае параметр k изменится, и прогноз будет отличаться от реальности.

[4] Со временем уже с первого взгляда на дифференциальное уравнение становится понятно, как будет выглядеть его график. Это только дело практики.

2. ПОЛЕТ РАКЕТЫ

На острове Хоккайдо в регионе Токати в расположенном на тихоокеанском побережье городе Тайки в рамках программы «Создание космического города» проводятся эксперименты по запуску гибридных ракет[5] на акриловом и парафиновом топливе. Ракета получает возможность двигаться вперед благодаря отбросу части собственной массы. Большинство ракет летит за счет выброса горячих газов, которые образуются вследствие химической реакции между топливом и окислителем[6]. Так как не может быть отброшена вся масса ракеты[7], то скорость, с которой ракета может приземлиться, будет иметь верхний предел. Этот предел называется конечной скоростью. Попробуем ее рассчитать.

Обозначим время за t, скорость ракеты за $V(t)$, массу ракеты за M, скорость выбрасываемых ракетным двигателем газов через υ. Тогда можем составить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}M} = -\frac{\upsilon}{M}. \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, описывающее скорость ракеты}$$

Можно применить метод разделения переменных. Обозначим массу ракеты до отброса ее части через M_i, а массу, оставшуюся после отброса части, через M_f, тогда:

$$V = \upsilon \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right). \qquad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения}$$

Это уравнение называется формулой Циолковского. Используя ее, можно рассчитать конечную скорость ракеты. Например, если скорость выбрасываемых ракетным двигателем газов $\upsilon = 1500$ м/с, начальная масса ракеты $M_i = 10$ кг, а конечная масса ракеты $M_j = 9$ кг, то для такой маленькой ракеты конечная скорость будет $V = 158$ м/с.

5 Ракета, в которой в качестве горючего и окислителя используются и твердые вещества, и жидкости.

6 Существуют также электрические двигатели, например ионные.

7 Ракета подобна грузовику, перевозящему багаж, поэтому даже если выбросить из ракеты все содержимое, останется само тело ракеты.

3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ОЩУЩЕНИЯ

Среди реакций нашего тела тоже есть такие, которые можно описать с помощью дифференциальных уравнений, решаемых методом разделения переменных. Например, закрывая глаза, мы ощущаем вес в 10 г. Однако если увеличить этот вес в 2 раза (до 20 г), то он не будет нами так ощущаться. Чтобы появилось ощущение, что вес увеличился в 2 раза, необходимо, чтобы этот вес был равен 100 г. Наши ощущения изменяются логарифмически. И это касается не только чувства веса, но и, например, громкости звука. Это называется **закон Фехнера**.

Обозначим физическую интенсивность явления через I, а интенсивность ощущения через $E(I)$, тогда если k – это константа, то можно составить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I} = \frac{k}{I}.$$ ← Дифференциальное уравнение, описывающее интенсивность ощущений

Решим его:

$$E = k \ln\left(\frac{I}{I_0}\right).$$ ← Решение дифференциального уравнения

Считаем, что реакция на минимальный ощутимый раздражитель равна нулю.

$E(I_0) = 0$.

Параметры k и I_0 для каждого ощущения различные у каждого человека[8].

[8] Бывают очень чувствительные люди, а бывают и нечувствительные.

4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕКЛАМЫ

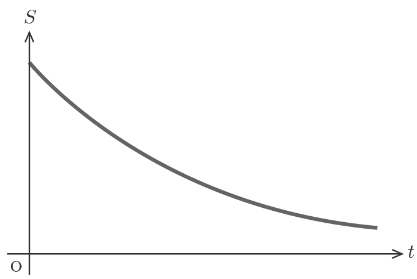
Метод вариации произвольных постоянных, при котором мы сначала находим решение для более простой задачи, а затем корректируем его так, чтобы оно удовлетворяло условиям исходного уравнения, применяется не только для описания природных, но и для социальных явлений тоже.

Мир переполнен различной рекламой. Почему же ее так много? Потому что, если не рекламировать продукт, упадут его продажи, не так ли[9]? На самом деле если продукт совсем не продвигать, то продажи будут уменьшаться экспоненциально[10]. Попробуем смоделировать это в виде дифференциального уравнения.

По результатам исследований, изменение скорости продаж S (количество продаж на единицу времени) относительно времени t можно описать такой экспоненциальной функцией:

$$S(t) = e^{-\lambda t+\mu}, \tag{A.1}$$

где λ и μ – константы. Конечно, что касается каждого человека по отдельности, то мы можем только определить вероятность, с какой он купит продукт. Эта же функция описывает поведение большой группы людей. Формула (A.1) показывает, как меняется скорость продаж при отсутствии рекламы.



Изменение скорости продаж относительно времени при отсутствии рекламы

А для такой функции мы уже знаем дифференциальное уравнение, которое можно решить методом разделения переменных. В соответствии с главой о методе разделения переменнных дифференциальное уравнение будет таким[11]:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\lambda S.$$

---

9 Либо просто из опасения, что продажи упадут.

10 *David N. Burghes.* Modelling with differential equations. С. 76.

11 Те, кто сомневается, могут подставить функцию S и убедиться.

Это и будет дифференциальное уравнение, описывающее скорость продаж при отсутствии рекламы.

А что же будет, если задействуется реклама? В этом случае появятся люди, которые купят продукт после просмотра рекламы[12]. То есть среди людей, увидевших рекламу, появится определенный процент тех, кто купит продукт, а значит, скорость продаж возрастет пропорционально проценту людей, увидевших рекламу $A(t)$. Однако если вы думаете, что с помощью рекламы можно продавать любое количество продукта, то это не так. Количество людей, имещих возможность приобрести товар, ограничено, а значит, скорость продаж в конце концов достигнет своего предела и станет постоянной[13]. Таким образом, если M – это предельная скорость продаж (уровень насыщения), то когда реальная скорость продаж S начинает приближаться к предельной скорости M, скорость продаж S должна замедляться. Другими словами, получается, что скорость продаж S должна быть пропорциональна разнице между предельной скоростью продаж M и скоростью продаж S (запас роста скорости продаж $M - S$). Будем считать, что отношение запаса роста скрости продаж $(M - S)$ к предельной скорости M выражает темп роста скорости продаж. Итак, изменение скорости роста продаж из-за рекламы можно записать как:

$$\gamma A \cdot \frac{M-S}{M},$$

где γ – это константа. Получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M-S}{M}.$$

Преобразуем немного правую часть:

$$-\lambda S + \gamma A \cdot \frac{M-S}{M} = -\lambda S + \gamma A - \gamma \frac{AS}{M} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S + \gamma A,$$

и получаем уравнение, которое является неоднородным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S + \gamma A. \qquad \leftarrow \text{Неоднородное дифференциальное уравнение, которое нас изначально интересует} \qquad (\text{A.2})$$

Попробуем его решить методом вариации произвольных постоянных.

Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (A.2):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) S. \qquad \leftarrow \text{Однородное уравнение} \qquad (\text{A.3})$$

[12] Хотя дело не ограничивается только покупками людей, посмотревших рекламу, но здесь мы говорим именно об эффективности рекламы.

[13] Понятно, что продавцы товара хотят расширить рынок. Но сколько не расширяй, количество людей на планете все равно ограничено.

Прежде всего решим его методом разделения переменных:

$$\int \frac{\mathrm{d}S}{S} = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) \int \mathrm{d}t.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\ln|S| = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t + C.$$

Получаем решение:

$$S = \pm e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t + C}.$$

Обозначим через c постоянную $\pm e^C$:

$$S = ce^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t}. \qquad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения} \qquad \text{(A.4)}$$

Получаем общее решение однородного уравнения (A.3).

Теперь подкорректируем полученное общее решение однородного уравнения (A.4) так, чтобы оно подходило для неоднородного уравнения (A.2). Заменим константу c на функцию от времени $c(t)$:

$$S(t) = c(t)e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t}. \qquad \leftarrow \text{Допустимое решение неоднородного дифференциального уравнения}$$

Получаем допустимое решение дифференциального уравнения (A.2). Подставим его и продифференцируем:

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t} + c(t)\left(-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t}\right) = -\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) c(t) e^{-\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t} + \gamma A.$$

Преобразуем и получим:

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma A e^{\left(\lambda + \gamma \frac{A}{M}\right) t}.$$

Сделаем замену $\alpha = \lambda + \gamma(A/M)$ и проинтегрируем:

$$c(t) = \gamma A \int e^{\alpha t} \mathrm{d}t = \gamma A \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c'.$$

Получаем общее решение:

$$S(t) = \left(\gamma A \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c'\right) e^{-\alpha t} = \frac{\gamma A}{\alpha} + c' e^{-\alpha t}. \qquad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения} \qquad \text{(A.5)}$$

Чтобы понять, как это решение описывает эффективность рекламы, определим конкретные условия. Разумно предположить, что даже когда нет рекламы, люди в каком-то объеме покупают продукт. Поэтому обозначим момент времени запуска рекламы за $t = 0$, скорость продаж S в этот момент полагаем равной $S(0) = S_0$. Кроме того, полагаем, что фиксированная реклама осуществляется на промежутке времени $0 < t < T$, и процент людей, смотрящих рекламу, тоже фиксирован.

$A(t) = A \ (0 < t < T)$.

Подставим начальное состояние $S(0) = S_0$ в решение (A.5):

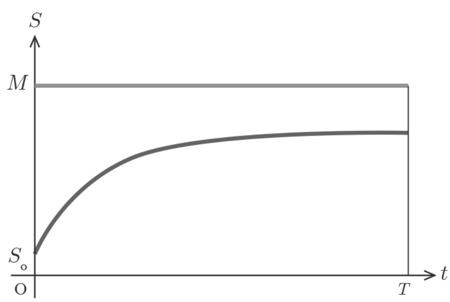
$$S(0) = S_0 = \frac{\gamma A}{\alpha} + c' e^{-\alpha \cdot 0};$$

$$\therefore c' = S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha}.$$

Значит, в период времени $0 < t < T$ скорость продаж будет:

$$S(t) = \frac{\gamma A}{\alpha} + \left(S_0 - \frac{\gamma A}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}. \qquad \leftarrow \text{Скорость продаж в период времени } 0 < t < T \tag{A.6}$$

Получается, что с началом рекламы скорость продаж растет очень быстро, затем начинает замедляться и в конце концов приближается к определенному значению.



Изменение скорости продаж при воздействии рекламы

А что будет, когда реклама прекратится? Предположим, что реклама останавливается в момент времени $t = T$, тогда при $t > T$ будет $A = 0$, а дифференциальное уравнение (A.5) станет:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S.$$

Общее решение, идентично с уравнением (A.1), будет:

$S(t) = ce^{-\lambda t}$.

Однако на этот раз благодаря рекламе скорость продаж возросла, поэтому она начинает снижаться со значения $S(T)$ в момент времени $t = T$. Если в уравнение (А.6) подставить значение $t = T$, получим:

$$S(T)=\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)e^{-\alpha T}.$$

Следовательно, исходя из общего решения (А.7):

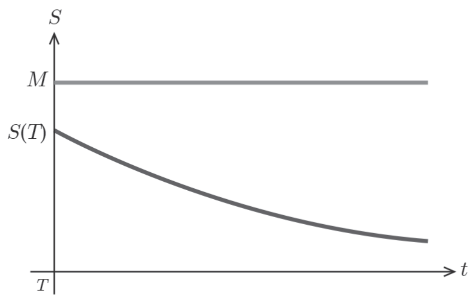
$$S(T)=c''e^{-\lambda T}=\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)e^{-\alpha T};$$

$$\therefore c''=\left(\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)e^{-\alpha T}\right)e^{\lambda T}.$$

А значит, решение будет:

$$S(T)=\left(\frac{\gamma A}{\alpha}+\left(S_0-\frac{\gamma A}{\alpha}\right)e^{-\alpha T}\right)e^{-\lambda(t-T)}.$$

При прекращении рекламы скорость продаж будет постоянно снижаться.



Изменение скорости продаж после прекращения рекламы

На самом деле, конечно, экономика не так проста[14]. Но все равно это очень интересно, не так ли, что с помощью дифференциальных уравнений можно объяснить поведение людей, пусть и не по отдельности, а в составе большой группы.

[14] На самом деле модель будет выглядеть намного сложнее.

5. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

В главе 3 мы рассматривали метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений. Но, кроме него, есть и другой способ, рассмотрим его в общих чертах.

В неоднородном уравнении

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \qquad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение}$$

обе части умножим на функцию $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x). \tag{A.8}$$

Если бы функция $\mu(x)$ обладала таким удобным свойством:

$$\frac{\mathrm{d}(\mu(x)y)}{\mathrm{d}x} = \mu(x)q(x),$$

то так как в правой части только функции от x, можно было бы проинтегрировать и получить решение:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\mathrm{d}x. \tag{A.9}$$

Давайте посмотрим, существует ли такая удобная функция $\mu(x)$. Проинтегрируем произведение:

$$\frac{\mathrm{d}(\mu(x)y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x}y + \mu(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Сравнив результат с дифференциальным уравнение (A.8), понимаем, что если

$$\frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mathrm{d}x} = \mu(x)p(x), \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение, подходящее для метода разделения переменных}$$

то это будет как раз нужная нам удобная функция. Тут можно применить метод разделения переменных:

$$\int \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{\mu(x)} = \int p(x)\mathrm{d}x.$$

Решим интегралы:

$$\ln\left|\mu(x)\right| = \int p(x)\mathrm{d}x;$$

$$\therefore \mu(x) = \pm e^{\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \leftarrow \text{Интегрирующий множитель}$$

Итак, мы нашли функцию, которая будет нам удобна. Такая функция называется **интегрирующим множителем**. Если интегрирующий множитель известен, то из уравнения (A.9) следует:

$$y = \frac{\int \mu(x) q(x) \mathrm{d}x}{\mu(x)},$$

что и будет являться общим решением неоднородного уравнения.

Попробуем решить неоднородное уравнение для оценки эффективности рекламы (A.2), сделав замену $\alpha = \lambda + \gamma(A/M)$:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\alpha S + \gamma A,$$

используя интегрирующий множитель. Интегрирующий множитель будет:

$$\mu(t) = \pm e^{\int \alpha \mathrm{d}t} = \pm e^{\alpha t + C} = \pm e^{C} e^{\alpha t} = ce^{\alpha t}.$$

Из общего решения (A.10) понятно, что содержащийся в интегрирующем множителе постоянный множитель может быть любым, а значит, можем взять и постоянную $c = \pm e^{C}$ (содержащую интегральную переменную), равную 1. Получим интегрирующий множитель:

$$\mu(t) = e^{\alpha t}. \qquad \leftarrow \text{Интегрирующий множитель}$$

Следовательно, общее решение будет:

$$S(t) = \frac{\int \mu(t) \gamma A \mathrm{d}t}{\mu(t)} = \frac{\int e^{\alpha t} \gamma A \mathrm{d}t}{e^{\alpha t}} = \frac{\gamma A}{\alpha} + c' e^{-\alpha t}, \qquad \leftarrow \text{Общее решение неоднородного уравнения}$$

что полностью совпадает с решением (A.5). Таким образом, если возможно найти интегрирующий множитель[15], то можно довольно просто решить и неоднородное дифференциальное уравнение.

[15] Интегрирующий множитель нельзя получить, не интегрируя, поэтому найти его не всегда возможно.

6. СНОВА ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

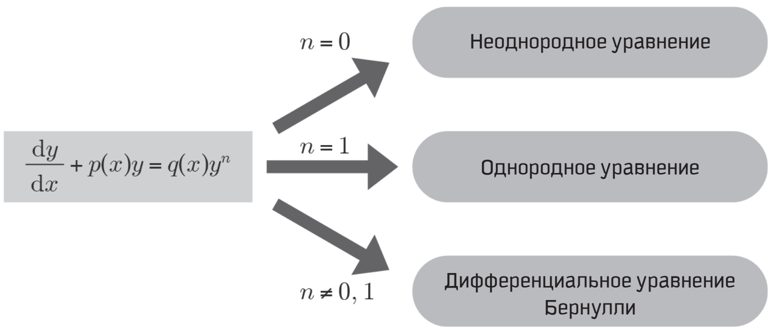
Неоднородное уравнение, которое мы рассматривали, изучая метод вариации произвольных постоянных на стр. 146:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \qquad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)}$$

Если его немного изменить, то получим:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n. \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение Бернулли (нелинейное)} \tag{A.11}$$

При $n = 0$ это будет неоднородное уравнение, при $n = 1$ – однородное линейное дифференциальное уравнение. В остальных случаях это будет нелинейное дифференциальное уравнение Бернулли. Уравнение Бернулли можно решить методом вариации произвольных постоянных, если сначала привести его к линейному дифференциальному уравнению с помощью замены переменных.



Однородное уравнение, неоднородное уравнение и дифференциальное уравнение Бернулли

Если в дифференциальном уравнении Бернулли произвести такую замену зависимой переменной y:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad \leftarrow \text{Замена переменной} \tag{A.12}$$

то можно будет привести его к виду линейного дифференциального уравнения. Попробуем это сделать. В дифференциальном уравнении Бернулли (5.11) разделим обе части на y^n:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x). \tag{A.13}$$

Однако если обе части уравнения (A.12) продифференцировать по x, получим:

$$\frac{dz}{dx} = -(n-1)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx};$$

$$\therefore \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx}.$$

А теперь из того, что получилось, и из уравнения (А.12), произведя замену в уравнении (А.13), получим:

$$-\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

Чтобы стало более наглядно, умножим обе части уравнения на 1 – n:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x). \qquad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)}$$

Получили линейное дифференциальное уравнение. Теперь все в порядке. Неоднородное дифференциальное уравнение можно решить либо методом вариации произвольных постоянных, либо используя интегрирующий множитель. Другими словами, сделав уравнение Бернулли с помощью замены переменных линейным, мы сделали его подходящим для использования уже известных нам инструментов.

На стр. 107, когда мы с помощью разложения на простые дроби решили методом разложения переменных дифференциальное уравнение логистической модели, на самом деле это было уравнение Бернулли. Попробуем вспомнить, если P – это численность населения, K – это предельная численность населения, μ – коэффициент Мальтуса, то дифференциальное уравнение будет:

$$\frac{dP}{dt} = \mu\left(1-\frac{P}{K}\right)P.$$

Преобразуем его немного:

$$\frac{dP}{dt} - \mu P = -\frac{\mu}{K}P^2 \qquad \leftarrow \text{Дифференциальное уравнение Бернулли (нелинейное)} \tag{A.14}$$

и, очевидно, получим дифференциальное уравнение Бернулли при n = 2.

Разделим обе части нелинейного дифференциального уравнения (А.14) на P^2:

$$\frac{1}{P^2}\frac{dP}{dt} - \mu\frac{1}{P} = -\frac{\mu}{K}. \tag{A.15}$$

Произведем замену зависимой переменной P:

$$z = \frac{1}{P}. \qquad \leftarrow \text{Замена переменной} \tag{A.16}$$

Продифференцируем по t:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{P^2}\frac{dP}{dt};$$

$$\therefore \frac{1}{P^2}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Подставим результат в нелинейное дифференциальное уравнение (A.15):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \mu z = \frac{\mu}{K}, \qquad \leftarrow \text{Неоднородное уравнение (линейное дифференциальное)} \tag{A.17}$$

и получаем линейное дифференциальное уравнение. Это неоднородное уравнение. Поэтому используем метод вариации произвольных постоянных. Прежде всего получим однородное уравнение:

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \mu z = 0. \qquad \leftarrow \text{Однородное уравнение}$$

Решим его методом разделения переменных:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\mu \int \mathrm{d}t.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\begin{aligned} &\ln|z| = -\mu t + C; \\ &\therefore z(t) = \pm e^{-\mu t + C} = ce^{-\mu t}. \end{aligned} \qquad \leftarrow \text{Решение однородного уравнения} \tag{A.18}$$

Здесь $c = \pm e^{C}$. Заменим c на функцию от времени $c(t)$:

$c = c(t)$.

Тогда решение (A.18) будет:

$z(t) = c(t)e^{-\mu t}$.

Подставим это в неоднородное уравнение (A.17):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(c(t)e^{-\mu t})}{\mathrm{d}t} + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\mu t} + \frac{\mathrm{d}e^{-\mu t}}{\mathrm{d}t}c(t) + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\mu t} - \mu e^{-\mu t}c(t) + \mu c(t)e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\mu t} &= \frac{\mu}{K}; \\ \frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mu}{K}e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем:

$$c(t) = \frac{\mu}{K}\int e^{\mu t}\mathrm{d}t = \frac{e^{\mu t}}{K} + c'.$$

Следовательно, решение будет таким:

$$z(t) = \left(\frac{e^{\mu t}}{K} + c'\right)e^{-\mu t}. \qquad \leftarrow \text{Решение неоднородного уравнения}$$

Используя формулу (A.16), вернем переменную P вместо z:

$$P(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\left(\frac{e^{\mu t}}{K} + c'\right)e^{-\mu t}} = \frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t} + Kc'}. \qquad \leftarrow \text{Решение дифференциального уравнения Бернулли} \tag{A.19}$$

Так же как в предыдущем примере, возьмем начальный момент времени $t = 0$ и численность населения в этот момент, равную P_0:

$$P_0 = \frac{Ke^{\mu\cdot 0}}{e^{\mu\cdot 0} + Kc'} = \frac{K}{1 + Kc'};$$

$$\therefore c' = \frac{K - P_0}{KP_0}.$$

Подставим это в решение (A.19):

$$P(t) = \frac{Ke^{\mu t}}{e^{\mu t} + K\left(\frac{K - P_0}{KP_0}\right)} = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-\mu t} + P_0}.$$

И получим решение, абсолютно идентичное решению (3.7) на стр. 108[16].

Подобно тому, как для достижения одной цели есть разные средства, так и решение одного дифференциального уравнения можно получить разными способами. Сначала нужно как следует освоить один способ, а затем можно развиваться дальше. Пусть способ решения дифференциального уравнения Бернулли (когда мы сперва привели его к линейному виду, затем нашли простое решение для однородного уравнения, после чего скорректировали это решение так, чтобы оно стало решением неоднородного уравнения) станет для вас таким вспомогательным средством.

[16] Его можно было решить также и методом интегрирующего множителя.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать
в торгово-издательском холдинге «Планета Альянс» наложенным платежом,
выслав открытку или письмо по почтовому адресу:
115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А.
При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому
должны быть высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя.
Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.
Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: **www.alians-kniga.ru**.
Оптовые закупки: тел. **(499) 782-38-89**.
Электронный адрес: **books@alians-kniga.ru**.

Сато Минору (автор), Адзума Секо (художник)

Занимательная математика

Дифференциальные уравнения

Манга

Главный редактор *Д. А. Мовчан*
dmkpress@gmail.com
Переводчик *С. Л. Плеханова*
Корректор *Г. И. Синяева*
Верстальщик *А. А. Чаннова*

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура Anime Ace. Печать офсетная.
Усл. п. л. 22,3125. Тираж 500 экз.

Веб-сайт издательства www.dmkpress.com